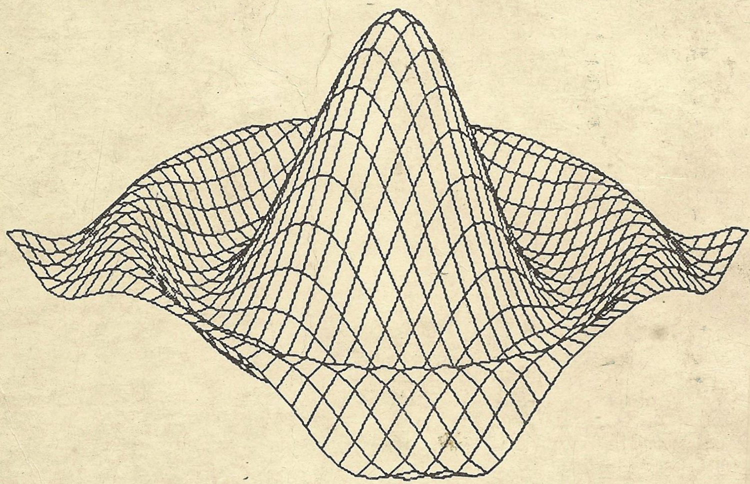
ماکزیمم و می نیمم

(بدون استفاده از مشتق)

ایوان نیون

ترجمهٔ پرویز شهریاری
ابراهیم عادل



ماکزیمم و می‌نیمم
(بدون استفاده از مشتق)

ایوان نیون

ترجمهٔ پرویز شهریاری
ابراهیم عادل

نشر بهار

تهران-۱۳۶۸

نشر بُردار: تهران ـ صندوق پستی ۱۱۳۶۵/۳۸۶۵

ماکزیمم و می‌نیمم (بدون استفاده از مشتق)

Maxima and Minima Without Calculus

ایوان نیون (Ivan Niven)

ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

چاپ اول: ۱۳۶۸

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ میخک

Ivan Niven

فهرست

فصل چهارم
قضیه‌های هم پیرامونی

فصل پنجم
نابرابری‌های اساسی درمثلثات

فصل ششم
چند ضلعی‌های محیطی و محاطی

فصل هفتم
بیضی

فصل هشتم
زنبورهای عسل و شش‌ضلعی‌های آن

فصل نهم
نتیجه‌های اضافی درهندسه

فصل دهم
مسأله‌های گوناگون کاربردی

پیش‌گفتار

دراین‌کتاب، از روش‌های مقدماتی عمده‌ای صحبت‌کرده‌ایم که درحل‌مساله‌های مربوط به‌ماکزیمم و می‌نیمم کاربرد دارند. درکتاب‌های‌درسی، دربارهٔ استفادهٔ ازمشتق برای حل‌این‌گونه مساله‌ها، بـه‌اندازهٔ کافی بحث شده است و، به همین مناسبت، دراین کتاب، صحبتی‌ازاین روش نرفته وتلاش شده است، بدون تکیه بـرمفهوم‌هـای مشتق و دیفرانسیل، روش‌های مقدماتی حل مساله‌ها جست وجو شود و، طبیعی است که هدف ما، نه رقابت با روش دیفرانسیلی، بـلکه تکمیل روش‌های شناخته شده است.

کوشش شده است، بـا تکیه بـرروش‌هـای هندسه و جبر، مسیرهای ناآشنا ویاکمترآشنایی، برای حل مساله‌های مربوط به‌ماکزیمم و می‌نیمم جست وجو شود. محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالـی، مبحثی منظم و سازمان یـافته است و، برای حل مساله‌های مربوط به اکسترممم، چنان راه حل‌های گام به‌گام واستواری داردکه بسیاری ازریاضی‌دانان را برآن داشته‌است تا هرگونه تلاش بـرای «جانشین کردن» روش‌هـای دیگر را، بیهوده وعبث بدانند و، درضمن، استفادهٔ گسترده از روش‌های هندسی را ـ که درکتاب حاضر مورد استفاده قرار گرفته است ـ «بی‌نتیجه» قلمداد کنند، ولـی من تنها مـی‌تـوانم بـگویم که: «معشوق من است آن‌که به‌نزدیك تو زشت است».

در واقع، سعی ما براین است که، با جست‌وجوی روش‌های «جانشین»، تا حـد ممکن با ایـن طـرز فـکرمقابله کنیم. این «روش‌های‌جانشین»، همان‌طور که خواهیددید، تنها وسیله‌هایی

نیستند که ما را درموردهای خاص و استثنائی یاری کنند؛ این‌ها راباید روش‌های عامی‌دانست که، باکاربرد گستردهٔ خود، دربیشترموردها، ارزش و کارسازی خود را نشان می‌دهند. به این دلیل است که ما، درکنار راه حل‌های درخشان واستثنائی که به‌کارحل یك مسالهٔ خاص می‌خورند، به‌روش عامی هم پرداخته‌ایم که می‌توانندگروه گسترده‌ای ازمساله‌ها را درخود جا دهند.

با وجود نظم و استحکامی که روش محاسبهٔ دیفرانسیلی درحل مساله‌های مربوط به‌اکسترمم‌ها دارد، نمی‌توان‌آن را شامل و جامع دانست، مساله‌های بسیاری وجود دارندکه‌حل آن‌ها، به‌کمك مشتق، گرچه غیر ممکن نیست، با دشواری و پیچیدگی روبه‌رومی‌شود. به‌عنوان مثال، می‌توان ازاین‌مساله یادکرد: دربین چهارضلعی‌های محاط در یك دایره، که محیطی برابردارند، مساحت کدام چهارضلعی حداکثراست؟ این مساله، که برای حل باروش‌های مقدماتی‌محاسبهٔ دیفرانسیلی مناسب نیست، می‌تواندآموزنده باشد، به‌نظرماراه درست‌آن است که: اگرمساله‌ای باروش محاسبهٔ دیفرانسیلی‌به‌سادگی حل‌می‌شود، بهتراست‌برای حل‌آن‌ازهمان روش‌استفاده کرد؛ ولی‌مساله‌های مربوط به‌ماکزیمم و می‌نیمم بسیارمتنوع و گسترده‌اند و، بنابراین، اشکالی وجود نداردکه برای حل‌آن‌ها، به‌روش‌های گوناگونی بیندیشیم.

برای خواندن این‌کتاب، به‌چه‌آگاهی‌هایی نیاز داریم؟ این‌کتاب برای‌کسانی‌نوشته شده است که برریاضیات‌دبیرستانی (ویا دقیق‌تر: بر ریاضیات قبل از محاسبهٔ دیفرانسیلی) مسلط وآگاهی وکارآیی لازم را در این زمینه داشته باشند. گرچه، برای مطالعهٔ این‌کتاب، نیازی به محاسبهٔ دیفرانسیلی نیست، ولی‌آشنایی با آن، امکان بالا بردن درك خواننده را فراهم

می کند. دراین کتاب، روش‌های مختلفی از هندسه به‌کار گرفته شده است، ولی از روش‌هایی مثل «آنـالیز برداری»، «هندسهٔ عددهای‌مختلط»، «تصویرقائم یاتصویرمرکزی» و غیره‌استفاده نکرده‌ایم، زیرا با آن‌که استفادهٔ از آن‌ها می‌تواند حل برخی مساله‌ها را ساده‌ترکند، ما را از هدفی که دراین کتاب دنبال می کنیم، دور می کنند.

دربخش اول، به‌آگاهی‌های کلی وپایه‌ای، که برای‌فهمیدن بحث‌های بعدی لازم‌اند، پرداخته‌ایم. موضوع اصلی‌کتاب، از بخش دوم آغازمی‌شود و، به‌همین‌مناسبت، خیلی‌ازخوانندگان، می‌توانند به‌طورمستقیم ازبخش دوم شروع کنند ولی‌به‌هرحال، ازهمهٔ خوانندگان مـی‌خواهیم به‌بخش ۱.۱ توجه‌کنند، زیرا در این بند، از قراردادها ونمادگذاری‌های مورد استفادهٔ این کتاب، صحبت شده است.

برای طرح هرموضوعی، کوشش‌کرده‌ایم ازمساله‌های ساده به‌تدریج به‌سمت مساله‌هـای دشوارتر برویم. مثلاً، مسالهٔ هم‌پیرامونی‌درصفحه را درنظربگیرید: «دربین همهٔ منحنی‌های بسته وساده‌ای‌که‌طولی برابردارند، کدام یك مساحت بیشتری را محصورمی‌کنند؟» این مساله، ابتدا درفصل چهارم حل شده است، ولی با این پیش فرض که، مساله دارای جواب است. ولی درفصل دوازدهم، دوبـاره به‌آن برگشته‌ایم و، این بار، مساله را بدون آن پیش‌فرض، حل‌کرده‌ایم. ازنظرمنطقی، این دوفصل به‌هم مربوطاند، ولی ما به‌این جهت آن‌ها را از هم جداکرده‌ایم‌که، فصل دوازدهم، حوزهٔ بسیارگسترده‌ای را در برمی‌گیرد و به‌سادگی فصل چهارم، که بسیار ابتدائی‌تراست، نیست.

فصل‌های ازدوم تا ششم، باید پشت سر هم مطالعه شوند، چراکه هرفصل بستگی به‌آشنایی با فصل قبل‌دارد. این‌فصل‌ها،

برای مطالعهٔ فصل‌های هفتم، هشتم و دوازدهم هم لازم‌انـد، ولی‌خود فصل‌های اخیر را می‌توان بدون ارتباط باهم مطالعه کرد. فصل‌های نهم، دهم و یازدهم مستقل ازیکدیگرند، ولی برفصل‌های دوم و سوم تکیه دارند.

درسراسرکتاب، مساله‌های زیادی‌آمده است که بایك حرف ویك شماره مشخص شده‌اند. مثلاً $E.۱۱$ به‌معنای مساله۱۱ ازفصل پنجم است. درپایان‌کتاب، پاسخ مساله‌ها و راهنمای حل آن‌ها داده شده است. ازخـوانند‌ه می‌خواهیم، خودش، با پی‌گیری، برای حل مساله‌ها بـکوشد و تنها به‌عنوان آخرین چاره، به راه‌حل آن‌ها مراجعه‌کند.

فصل اول

ورود به‌مطلب

دراین‌فصل، از تعریف‌ها، نمادها، قراردادها و نتیجه‌گیرهای‌زمینه‌ای صحبت شده است تا درمطالعهٔ کتاب، اشکالی پیش نیاید. شاید، برای برخی ازخوانندگان، کافی باشدکه به‌طورسطحی ازاین فصل‌بگذرند، ولی‌به‌هرحال، در این فصل،کوشیده‌ایم تا از همهٔ قراردادهایی‌که در ارتباط با بکاربردن نمادها دراین‌کتاب‌هستند، یادکنیم و، به‌طورکلی،خواننده را با«زبان»کتاب آشنا سازیم. بحث جدی در مورد ماکزیمم ومی‌نیمم را ازفصل دوم‌کتاب آغازکرده‌ایم و، بنابراین،خواننده خیلی‌زود، به‌موضوع اصلی بحث‌می‌رسد.

۱۰۱. زبان و نماد. اگر a و b دوعددحقیقی باشند، وقتی‌که‌می‌گوییم a از b بزرگتر است، به این معناست که $a-b$، عددی مثبت است؛ این واقعیت را می‌توان با یکی از صورت‌های زیر نشان داد:

$$a>b،\qquad a-b>۰،\qquad b<a،\qquad b-a<۰$$

به‌همین‌ترتیب، وقتی‌که بدانیم a از b کوچکتر نیست، به‌معنای آن است‌که $a-b$ مثبت یا صفر است ومی‌نویسیم:

$$a\geqslant b،\qquad a-b\geqslant ۰،\qquad b\leqslant a،\qquad b-a\leqslant ۰$$

نماد $\max(a،b،c)$ به‌معنای‌بزرگترین‌عدداز‌بین‌عددهای a،bو c است.مثلاً

$$\max(۲،۳،۵)=۵\quad \max(۲،۳،-۵)=۳،\quad \max(۳،۳،-۵)=۳$$

درحالت‌کلی، وقتی ازبین عددهای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$،...، a_n را، به‌تعداد محدود، انتخاب می‌کنیم، ضرورتی نداردکه همهٔ a_iها متمایز باشند.معادلهٔ

$$\max(a_۱، a_۲،...،a_n)=a_j$$

که درآن، j، عددی از بین عددهای ۱، ۲، ...، n، به‌این معناست که باید همهٔ نابرابری‌های زیر برقرار باشند:

$$a_j \geqslant a_1, \quad a_j \geqslant a_2, \quad a_j \geqslant a_3, \ldots, a_j \geqslant a_n$$

به‌همین‌ترتیب، وقتی برای مجموعه‌ای متناهی از عددهای حقیقی بنویسیم:

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_k$$

به‌این معناست که، همهٔ نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$a_k \leqslant a_1, \quad a_k \leqslant a_2, \quad a_k \leqslant a_3, \ldots, a_k \leqslant a_n$$

وقتی‌که با زیرمجموعه‌ای نامتناهی ازعددهای حقیقی سر و کار داشته باشیم، ممکن است در بین عضوهای آن، عضو ماکزیمم یا می‌نیمم وجود نداشته باشد. به‌عنوان مثال، نمی‌توانیم کوچکترین عدد حقیقی مثبت را پیدا کنیم، زیرا برای هرعدد حقیقی مثبت، عدد $\frac{r}{2}$ هم وجود داردکه باز هم حقیقی و مثبت است.

اگر a و b را دوعدد حقیقی، باشرط $a<b$، فرض کنیم، آن وقت، درمجموعهٔ عددهای x که با نابرابری $a<x<b$ سازگار باشند، نمی‌توان عضو ماکزیمم یا عضو می‌نیمم را پیدا کرد؛ باوجودی‌که، عددهای این مجموعه، دارای کوچکترین کران بالای b، وبزرگترین کران پایین a هستند. کران بالا، برای مجموعه‌ای از عددهای حقیقی، به عددی گفته می‌شود که از هر عضو این مجموعه بزرگتر و یا با آن برابرباشد. به‌همین‌ترتیب، کران پایین‌مجموعه‌ای ازعددهای حقیقی، به‌عددی گفته می‌شودکه ازهیچ عددعضو مجموعه بزرگتر نباشد.

مجموعه‌ای ازعددهای‌حقیقی را، کران‌دار گویند، وقتی بتوان‌عددهای ثابت c و k را طوری پیدا کردکه، برای هر عضو x ازمجموعهٔ مفروض، نابرابری $c \leqslant x \leqslant k$ برقرارباشد. درحالتی‌که نابرابری $x \leqslant k$ برقرارباشد، مجموعهٔ مفروض، ازبالاکران‌دار است؛ و درحالتی‌که برای هرعضو x از مجموعهٔ مفروض، داشته‌باشیم: $c \leqslant x$، آن‌وقت، مجموعه، ازپایین‌کران‌دار

است [k، کران بالا و c، کران پایین عضوهای مجموعه است]. برای هر مجموعه‌ای از عددهای حقیقی که کران‌دار باشد، کوچکترین کران بالای منحصر به‌فرد، و بزرگترین کران پایین منحصر به‌فرد وجود دارد. دراین‌جا، به‌اثبات این حکم نمی‌پردازیم، زیرا دراین کتاب، با حالت‌های خاصی از مجموعه‌ها سروکار داریم که به‌انتخاب پاره‌خط‌هایی از یك خط راست‌حقیقی منجر می‌شود (محور xها درهندسهٔ تحلیلی، تصور روشنی از خط‌راست حقیقی را به ما می‌دهد). مثلاً، وقتی عددهای x با نابرابری $a<x<b$ سازگار باشند، فاصلهٔ‌بازی را تشکیل‌می‌دهند که با نماد (a,b) نشان‌می‌دهیم.

وقتی‌که مجموعهٔ عددهای x با نابرابری $a\leqslant x\leqslant b$ سازگار باشند، به‌معنای یك فاصلهٔ بسته است که با نماد $[a,b]$ نشان داده می‌شود. این مجموعه از عددها، دارای عضو ماکزیمم b و عضو می‌نیمم a است؛ در عین‌حال، b، کوچکترین کران بالا؛ و a، بزرگترین کران پایین است. نماد $[a,b)$ به‌این‌معناست که، عددهای x با نابرابری $a\leqslant x<b$ صدق می‌کنند. این مجموعه، دارای عضو می‌نیمم a است، ولی عضو ماکزیمم ندارد. در این مجموعه، b، کوچکترین کران‌بالا و a، بزرگترین کران پایین است. همچنین، مجموعهٔ xهای متعلق به‌فاصلهٔ $(a,b]$، یعنی $a<x\leqslant b$. دراین‌حالت، مجموعهٔ مفروض، دارای عضو ماکزیمم b است ولی عضو می‌نیمم ندارد.

واژه‌های «سوپرموم» (مرزبالا) و «انفیموم» (مرز پایین)، اغلب در نوشته‌های ریاضی، به‌معنای کوچکترین کران‌بالا و بزرگترین کران‌پایین به‌کار می‌روند، ولی ما از آن‌ها استفاده نخواهیم‌کرد.

گاهی پیش می‌آیدکه، به‌جای جست وجوی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $f(x)$، بهتر است به‌سراغ می‌نیمم یا ماکزیمم تابع $-f(x)$ برویم. مثلاً اگر بدانیم، تابع $۹+x^{۲}-۲x$ درحوزهٔ عددهای حقیقی، حداقلی‌برابر ۸ دارد، آن‌وقت می‌توانیم نتیجه بگیریم که، تابع $-۹-x^{۲}+۲x$، در -۸ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. [اتحاد $۹+x^{۲}-۲x=۸+(x-۱)^{۲}$، به‌روشنی‌نشان می‌دهدکه، عدد ۸، حداقل مقدار این عبارت است.] همچنین، ازهمین جامی‌توان نتیجه گرفت که، حداقل‌مقدارتابع $f(x)=۹۰+x^{۲}-۲x$،

برابر ۸۹؛ وحداقل تابع $f(x)=۹۰۰+۱۰x^۲-۲۰x$، برابر ۸۹۰ است.

برای معکوس این تابع‌ها هم، می‌توان به‌همین طریق عمل کرد. باتوجه به‌مثال قبلی، نتیجه می‌گیریم که ماکزیمم کسر $\frac{۱}{۹+x^۲-۲x}$ در حوزهٔ عددهای حقیقی، برابر است با $\frac{۱}{۸}$.

اکنون، به‌بعضی ازقراردادها، درهندسه، توجه کنیم. برای‌هردو نقطهٔ متمایز P و Q، نماد PQ، بسته به موقعیت، به‌سه معنی به‌کار می‌رود: ساده‌ترین معنای آن، خط راست PQ است، یعنی خط راست بی‌پایان و بی‌آغازی که از دو نقطهٔ P و Q گذشته است؛ این نماد، همچنین، می‌تواند به‌معنای پاره‌خط راست PQ باشد، یعنی پاره‌خط راستی که به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ P و Q محدود شده است، یعنی P یک انتها و Q انتهای دیگر آن است؛ بالاخره نماد PQ را می‌توان به‌معنای طول پاره‌خط راست PQ، یعنی فاصلهٔ دو نقطهٔ P و Q، گرفت؛ در حالت اخیر، وقتی که P و Q دو نقطهٔ متمایز باشند، PQ، عددی است مثبت، بنابراین $PQ=QP$. فاصلهٔ PQ هرگز منفی نیست وتنها وقتی برابر صفر است که دو نقطهٔ P و Q برهم منطبق باشند. به‌این مفهوم، از برابری $PQ=RS$، به‌روشنی، نتیجه می‌شود که فاصله‌های PQ و RS باهم برابرند.

نیم‌خط راست PQ، به‌معنای بخشی ازخط راست، به‌نحوی که به‌نقطهٔ P محدود شده باشد، ولی از طرف نقطهٔ Q، در امتداد از P به Q امتداد داشته باشد.

هر مثلث، شامل سه‌نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست، مثل A، B و C است، به‌نحوی که هر دونقطهٔ آن پاره‌خطی را که ضلعی ازمثلث است، پدید می‌آورند: پاره‌خطهای AB، BC و AC ضلع‌های مثلث‌اند، بنابراین، مساحت مقداری است مثبت (برابر صفر هم، نمی‌تواند باشد). نابرابری اصلی درهر مثلث، معرف آن است که: درهرمثلث، مجموع طول‌های هر دوضلع، ازطول ضلع سوم بزرگتر است، مثلاً، $AB+BC>AC$.

درحالت کلی‌تر، برای هرسه نقطهٔ متمایز P، Q و R، همیشه داریم: $PQ+QR \geqslant RP$؛ برابری وقتی، و تنها وقتی برقرار است که نقطهٔ Q، واقع برپاره‌خط RP باشد (وقتی که می گوییم Q، نقطه‌ای در داخل پاره‌خط PR است، به‌این معناست که Q، کاملاً بین دونقطهٔ P و R در روی پاره‌خط PR قرار دارد).

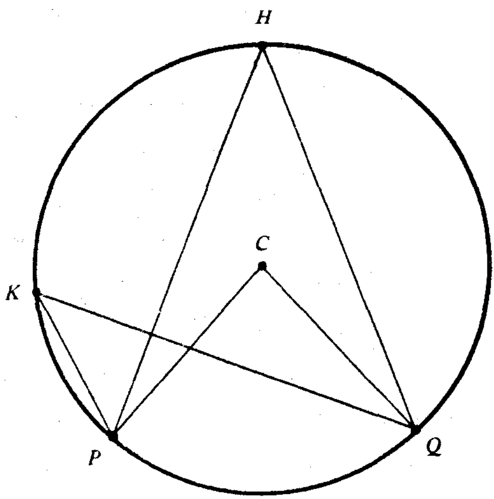
برای عدد درست $n \geqslant ۳$، n ضلعی یا چندضلعی با n ضلع، شامل مجموعه‌ای از n نقطهٔ متمایز $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n است که بریك صفحه واقع باشند؛ این نقطه‌ها، راس‌های n ضلعی وپاره‌خطهای راست $P_۱P_۲$، $P_۲P_۳$، ...، $P_{n-۱}P_n$، $P_nP_۱$، ضلع‌های nضلعی هستند، با این شرط که ضلع‌ها نقطهٔ مشترکی ندارند، به‌جز این که هردوضلع مجاور، درنقطهٔ منحصری که راس چندضلعی است، به‌هم‌رسیده‌اند. اجتماع ضلع‌های n ضلعی، محیط یامرز آن را مشخص می کند؛ محیط یا مرز، نقطه‌های درون چند ضلعی را از نقطه‌های واقع دربیرون آن، جدا می‌کند. چندضلعی را محدب (یا کوژ) گویند، وقتی که، پاره‌خط واصل بین هر دونقطه ازمحیط چندضلعی، از هیچ نقطهٔ واقع دربیرون چندضلعی نگذرد، یعنی هیچ نقطه‌ای ازاین پاره‌خط، در بیرون چندضلعی نباشد. همچنین، می‌توان گفت که: چندضلعی وقتی محدب است که هریك از زاویه‌های داخلی آن، از ۱۸۰ درجه بیشتر نباشد.

درحالت کلی، مجموعهٔ S از نقطه‌ها را، محدب گویند، به شرطی که برای هردونقطهٔ A و B ازآن، تمامی پاره‌خط راست AB درمجموعهٔ S واقع باشد.

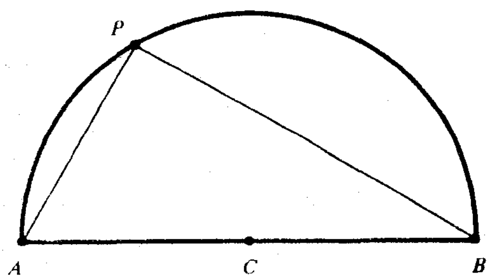
۲.۱. هندسه ومثلثات. زاویهٔ PCQ را که راس آن، C، درمرکز دایره و روبه‌کمان PQ باشد، زاویهٔ مرکزی گویند (P و Q روی محیط دایره‌اند). اندازهٔ زاویهٔ مرکزی PCQ، دوبرابر اندازهٔ زاویهٔ PKQ، که در آن، K نقطه‌ای ازمحیط دایره واقع بر کمان دیگر PQ است (شکل ۲.۱-a). ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، اگر K و H دو نقطه ازکمان PQ باشند، $\widehat{PKQ}=\widehat{PHQ}$. همچنین، چهارضلعی $PQRS$ وقتی، و تنها وقتی، قابل

محاط در دایره است که مجموع هردو زاویهٔ روی‌به‌رو در آن، برابر ۱۸۰ درجه باشد. مجموع هر چهار زاویهٔ داخلی دریک چهارضلعی، برابر ۳۶۰ درجه است؛ به‌طور کلی، مجموع زاویه‌های داخلی یك n ضلعی، برابراست با: $(n-۲)۱۸۰^{\circ}$.

اگر P نقطه‌ای روی نیم‌دایرهٔ به‌قطر AB باشد، همان‌طورکه در شکل ۲۰۱-b می‌بینید: $\widehat{APB}=۹۰^{\circ}$ به‌طورکلی، اگر راس زاویه‌ای روی محیط دایره باشد و دوضلع آن، از دو انتهای قطری از دایره بگذرد، یك



شکل ۲۰۱-a



شکل ۲۰۱-b

زاویهٔ قائمه است. برعکس، اگر یك منحنی با دو انتهای A و B داده شده باشد و بدانیم، برای هرنقطهٔ P ازاین منحنی، زاویهٔ APB برابر ۹۰ درجه است، آن‌وقت این منحنی، یك نیم‌دایره است. حکم اخیر، در بیشتر کتاب‌ها ثابت نشده است و، بنابراین، ممکن است تردیدهایی برای خواننده‌به‌وجود آورد. به همین مناسبت، اثبات‌آن را می‌آوریم. دستگاه محورهای مختصات قائم را طوری انتخاب می‌کنیم که محور xها بر AB ومبداء مختصات‌برنقطهٔ C، وسط AB، منطبق باشند. طول پاره خط راست AB را C می‌گیریم؛ بنابراین B و A به‌ترتیب بامختصات $(c، ٠)$ و $(-c، ٠)$ خواهند بود. نقطهٔ دلخواه P واقع برمنحنی را بامختصات $(x، y)$ فرض‌می‌کنیم، دراین‌صورت، ضریب‌زاویه‌های‌خط‌های‌راست PB و PA، به‌ترتیب، برابر $\frac{y}{x-c}$ و $\frac{y}{x+c}$ می‌شوند . خط‌های راست PB و PA برهم عمودند، درنتیجه، حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های آن‌ها، برابر است با ۱ — :

$$\frac{y}{x-c}\cdot\frac{y}{x+c}=-۱$$

که بعداز تبدیل‌های ساده، ما را به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲=c^۲$ می‌رساند؛ واین، معادلهٔ دایره‌ای است به‌مرکز مبداء مختصات و بـه‌شعاع برابر c. هریك‌از دونیم دایرهٔ به‌قطر AB، برمنحنی قرار داردکـه، برای هر نقطهٔ P دلخواه آن، داشته باشیم: $\widehat{APB}=۹٠^\circ$.

اگر a، b و c را طول‌های سه‌ضلع‌مثلث بگیریم، بنابر نابرابری‌اصلی درمثلث، داریم:

$$a+b>c، \qquad a+c>b، \qquad b+c>a$$

همچنین، اگر دوضلع مثلث، نابرابر باشند، زاویه‌های روبه‌رو به‌این ضلع‌ها هم، نابرابرند، به‌نحوی که باشرط $a>b$ داریم: $\alpha>\beta$ و برعکس (αوβ، به‌ترتیب، زاویه‌های روبه‌رو به‌ضلع‌های a و b هستند).

اگر a، b و c طول‌های سه‌ضلع مثلث و α، β و γ، اندازهٔ زاویه‌های روبه‌رو به‌این ضلع باشند، بنابرقانون سینوس‌ها، داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

و بنابرقانون کسینوس‌ها

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\gamma$$

درحالتی‌که $\gamma=۹۰^\circ$ باشد، $\cos\gamma$ برابرصفرمی‌شود وبه‌رابطهٔ $c^۲=a^۲+b^۲$ می‌رسیم که همان قضیهٔ فیثاغورث درمثلث قائم‌الزاویه است.

اتحادهای مثلثاتی زیر، کاربردهای فراوان دارند:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

(درهریك از اتحادها، علامت‌های بالا را بـا هم وعلامت‌های پایین را باهم بگیرید). ازهمین دو اتحاد، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

۳.۱. مساحت‌ها وحجم‌ها. برای مساحت مثلث، سه‌دستور استاندارد وجود داردکه‌ازهرکدام‌می‌توان، بسته‌به‌موقعیت، استفاده‌کرد. اگر a، b وc را طول‌هـای سه‌ضلع مثلث و α، β و γ را بـه‌ترتیب، اندازهٔ زاویـه‌های روبه‌رو به‌آن‌ها فرض‌کنیم ومساحت مثلث را A بگیریم، داریم:

$$A=\frac{۱}{۲}ab\sin\gamma=\frac{۱}{۲}ac\sin\beta=\frac{۱}{۲}bc\sin\alpha \qquad (۱)$$

و این، دستوری است‌که مساحت مثلث را برحسب سه جزء مثلث می‌دهد.

دستور دوم، بـرای محاسبهٔ مساجت مثلث $A=\frac{bh}{۲}$ اسـت کـه، در آن، h، طول ارتفاع وارد برضلع b است. دستور سوم، برای محاسبهٔ مساحت‌مثلث، دستور هرون (Heron) است:

$$A=[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۲)$$

که در آن، $s=\frac{a+b+c}{۲}$، نصف محیط مثلث است. دستور هرون، خیلی ساده به‌دست می‌آید. اگر دستور (۱) را به‌این‌صورت بنویسیم:

$$A^{۲}=\frac{۱}{۴}a^{۲}b^{۲}sin^{۲}\gamma=\frac{۱}{۴}a^{۲}b^{۲}(۱-cos^{۲}\gamma)$$

و به‌جـای $cos^{۲}\gamma$، مقدار آن را ازقانون کسینوس‌هـا در مثلث، قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$A^{۲}=\frac{۱}{۴}a^{۲}b^{۲}\left[۱-\frac{(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})^{۲}}{۴a^{۲}b^{۲}}\right]=$$

$$\frac{۱}{۱۶}[۴a^{۲}b^{۲}-(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})^{۲}]=$$

$$=\frac{۱}{۱۶}[۲ab+(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})][۲ab-(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})]=$$

$$=\frac{۱}{۱۶}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=$$

$$=\frac{۱}{۱۶}\cdot ۲s(۲s-۲c)(۲s-۲b)(۲s-۲a)=s(s-c)(s-b)(s-a)$$

برای‌مساحت چهارضلعی هم، دستور مشابهی وجود دارد. اگر a،b، c و d را طـول ضلـع‌هـای چهـار ضـلعی، s را بـرابـر نصـف محیط آن $\left(s=\frac{a+b+c+d}{۲}\right)$، θ و λ را دو زاویهٔ روبه‌رو درچهارضلعی و A را

مساحت آن بگیریم، داریم:

$$A^۲=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{۱}{۲}abcd[۱+\cos(\theta+\lambda)] \quad (۳)$$

که درآن، فرقی نمی‌کندکه برای دو زاویهٔ θ و λ، کدام زاویه‌های روبه‌رو را انتخاب کنیم. در واقع، اگر دو زاویهٔ دیگر روبه‌رو را α و β بگیریم، داریم:

$$(\theta+\lambda)+(\alpha+\beta)=۳۶۰^\circ \Rightarrow \cos(\theta+\lambda)=\cos(\alpha+\beta)$$

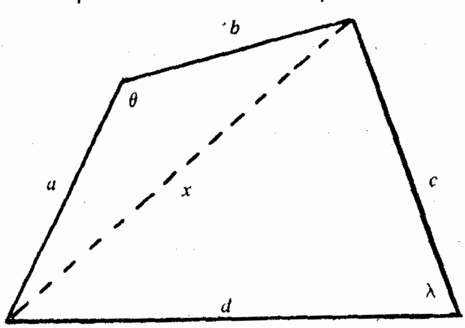
زیرا، همیشه داریم: $\cos a=\cos(۲\pi-a)$.

درحالتی که بـا یك چهارضلعی محاطـی سروکار داشته بـاشیم، یعنی $\theta+\lambda=۱۸۰^\circ$، آن‌وقت $\cos(\theta+\lambda)=-۱$، و دستورمساحت‌چهارضلعی محاطی، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$A=[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{۱}{۲}} \quad (۴)$$

برای اثبات درستی دستور (۳)، یکی از قطرهای چهارضلعی را رسم می‌کنیم وطول آن را برابر x می‌گیریم (شکل ۱-۳-a). زاویهٔ بین دوضلع aو b را θ، و زاویهٔ‌بین دوضلع c و d را λ می‌نامیم. از دستورکسینوس‌ها، در دو مثلث حاصل، به‌دست می‌آید:

$$x^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\theta=c^۲+d^۲-۲cd\cos\lambda \quad (۵)$$



شکل ۱-۳-a

که از آن، نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos\theta-2cd\cos\lambda$$

اگر دو طرف این برابری را مجذور و، سپس، آن را منظم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+8abcd\cos\theta\cos\lambda=$$
$$=4a^2b^2\cos^2\theta+4c^2d^2\cos^2\lambda \qquad (6)$$

مساحت چهارضلعی را، می‌توان مجموع مساحت‌های دو مثلث حاصل دانست و در نتیجه، بنابر دستور (۱)، داریم:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin\lambda$$

که اگر دو طرف این رابطه را مجذور و، سپس، ۱۶ برابر کنیم:

$$16A^2=4a^2b^2\sin^2\theta+4c^2d^2\sin^2\lambda+8abcd\sin\theta\sin\lambda=$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-4a^2b^2\cos^2\theta-4c^2d^2\cos^2\lambda+8abcd\sin\theta\sin\lambda$$

از رابطهٔ (۶) استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$16A^2=4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-$$
$$-8abcd\cos\theta\cos\lambda+8abcd\sin\theta\sin\lambda=$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-8abcd\cos(\theta+\lambda)=$$
$$=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-$$
$$-8abcd[1+\cos(\theta+\lambda)] \qquad (7)$$

از طرف دیگر داریم:

$$(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(2ab+2cd+a^2+$$
$$+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)=$$
$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+$$
$$+c+d)=(2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)$$

که اگر در رابطهٔ (۷) قرار دهیم، به‌همان دستور (۳)، برای مساحت چهارضلعی، می‌رسیم.

اگر p و q، طول قطرهای یك چهارضلعی محاطی باشند، آن‌وقت، بنابر قضیهٔ بطلمیوس داریم:

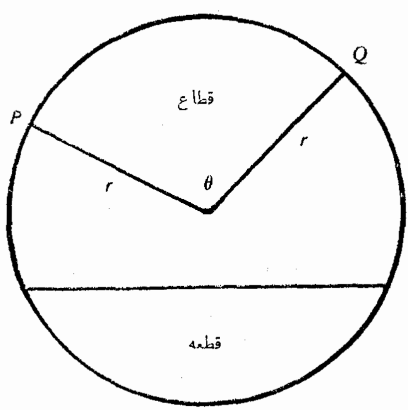
$$ac+bd=pq$$

که در ۵۰۱۰، به‌تفصیل دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

مساحت A ومحیط C از دایرهٔ به‌شعاع r، به‌کمك دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$A=\pi r^{۲} \quad \text{و} \quad C=۲\pi r$$

که درآن‌ها، π مقداری ثابت و تا پنج رقم دهدهی برابر ۳٫۱۴۱۵۹ است. دو نقطه PوQ، واقع برمحیط دایره، محیط دایره را به‌دو کمان‌تقسیم‌می‌کنند: کمان کوچکتر PQ و کمان بزرگتر PQ بخشی از سطح دایره را که محدود به کمان PQ و دو شعاع واصل به نقطه‌های P و Q باشد، قطاع دایره گویند. مساحت قطاع دایره، برابر است با $\frac{۱}{۲}r^{۲}\theta$ که، درآن، θ عبارت‌است از زاویهٔ روبه‌رو به کمان PQ، برحسب رادیان (شکل ۳.۱-b). طول کمان



شکل ۳۰۱-b

PQ، برابر است با $r\theta$. هر ۱۸۰ درجه، برابر π رادیان است.
حجم V و مساحت‌سطح S از کرهٔ به‌شعاع r، با این دستورها محاسبه می‌شوند:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{و} \quad S = 4\pi r^2$$

برای استوانهٔ قائم، دستورهای حجم وسطح کل، به‌این‌صورت است:

$$V = \pi r^2 h \quad \text{و} \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

که در آن‌ها، r شعاع قاعدهٔ استوانه و h ارتفاع آن است. برای مخروط قائم‌دوار، دستورهای حجم وسطح کل، چنین‌اند:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \text{و} \quad S = \pi r^2 + \pi r(r^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$$

در S، جملهٔ πr^2 معرف مساحت قاعدهٔ مخروط و جملهٔ بعد، معرف سطح جانبی آن است.

حجم یك چهار وجهی، از دستور $\frac{1}{3} Ah$ به‌دست‌می‌آیدکه، درآن، A، مساحت یکی‌از وجه‌ها و h، ارتفاع وارد برهمین وجه درچهاروجهی است.

A۰۱. a، b، c، d، طول ضلع‌های یك چهارضلعی‌اند ومی‌دانیم: $a+b=c+d$. ثابت کنید، مساحت‌این‌چهارضلعی، برابراست‌با $(abcd)^{\frac{1}{2}}$.

A۰۲. آیا دستور (۳)، برای‌محاسبهٔ مساحت چهارضلعی مقعر (کاو)، درست است؟ [چهارضلعی، وقتی مقعر است که یکی ازقطرهای آن، دربیرون شکل قرار گیرد.]

A۰۳. مثلثی مفروض است. ثابت‌کنید می‌توان واحد طول را طوری تعریف‌کردکه مساحت مثلث، برابر واحد شود. [هدف این مساله این است که: همیشه می‌توان، بدون این‌که به‌کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، درصورت لزوم و با انتخاب واحد مناسب برای طول، مساحت مثلث را برابر ۱ گرفت.]

۴.۱. نابرابری‌ها. برای تکمیل تعریف‌های اصلی که برای نابرابری‌ها، در ۱.۱ آوردیم، برخی از نتیجه‌های اساسی را، بدون اثبات می‌آوریم. ویژگی سرایت‌پذیری: اگر $a>b$ و $b>c$، آن‌گاه $a>c$. این نتیجه، برای حالت نابرابری‌ضعیف $a\geqslant b$ هم درست‌است. اگر a، b، c، d و k عددهای حقیقی‌مثبت باشند، که درنابرابرهای $a\geqslant b$ و $c>d$ صدق کنند، داریم:

$$(۱)\quad a+c>b+d \quad \text{و} \quad ac>bd،$$

$$(۲)\quad a+k\geqslant b+k \quad \text{و} \quad ak\geqslant bk،$$

$$(۳)\quad c+k>d+k \quad \text{و} \quad ck>dk،$$

$$(۴)\quad a^{-1}\leqslant b^{-1} \quad \text{و} \quad c^{-1}<d^{-1}،$$

$$(۵)\quad a^n\geqslant b^n \quad \text{و} \quad c^n>d^n$$

$$(۶)\quad a^{\frac{1}{n}}\geqslant b^{\frac{1}{n}} \quad \text{و} \quad c^{\frac{1}{n}}>d^{\frac{1}{n}}$$

در دو رابطهٔ اخیر، n، عددی درست و مثبت است. درضمن، نابرابری اول، در هرکدام از موردهای (۱) و (۲) و (۳)، بدون شرط مثبت بودن عددها هم، درست‌اند.

قدرمطلق‌عدد حقیقی r را، با نماد $|r|$ نشان‌می‌دهند. این قدرمطلق‌را، به‌صورت $\max(r، -r)$ هم می‌توان تعریف‌کرد. صورت دیگر تعریف قدرمطلقr، چنین‌است: $|r|=r$ باشرط $r\geqslant 0$ و $|r|=-r$، باشرط $r<0$.

درمساله‌های‌زیر، عددهای a،b،c،d حقیقی ومثبت فرض‌شده‌اند.

A۴. آیامی‌توان ازنابرابری $a+b>c$ نتیجه گرفت: $a^2+b^2>c^2$ یا $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$؟

A۵. آیا ازنابرابری‌های $a+b>c+d$، $a>b$ و $c>d$ می‌توان نتیجه گرفت: $a>c$، $a>d$، $b>c$ یا $b>d$؟ یا ثابت کنید و یا برای هر حالت، یك مثال نقض بیاورید.

A۶. مطلوب‌است $\max(a، a^2)$ و $\max(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,،\, \sqrt{a+b})$.

A۷. کدام یك‌ازبرابری‌های زیر، درصورت وجود، برای مقدارهای

حقیقی r، s و t برقرار است؟

$$(I) \quad [\max(r, s, t)]^2 = \max(r^2, s^2, t^2),$$

$$(II) \quad [\max(r, s, t)]^3 = \max(r^3, s^3, t^3),$$

$$(III) \quad |\max(r, s, t)| = \max(|r|, |s|, |t|)$$

۸۰A. اگر α، β و γ زاویه‌های یك مثلث باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$$

۹۰A. نیوتون، برای تعریف مقدار تقریبی ریشهٔ دوم، این روند را پیشنهاد می‌کند: برای هر عدد مثبت c، x_1 را برابر مقدار تقریبی $\sqrt{c}$ می‌گیریم، ولی $x_1 \neq \sqrt{c}$. سپس، مقدارهای x_2، x_3،... را، پشت سرهم، به‌این‌ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{c}{x_1}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{c}{x_2}\right), \ldots,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \ldots$$

مثلا اگر $c = 2$ و $x_1 = 1$ بگیریم، به ترتیب، به‌دست می‌آید: $x_2 = \frac{3}{2}$،

$x_3 = \frac{17}{12}$ و ... $x_4 = \frac{577}{408} = 1/4142157 \ldots$، که پنج رقم دهدهی عدد $\sqrt{2}$ را به‌درستی نشان‌می‌دهد. ثابت کنید، درحالت $n > 1$ داریم: $x_n > \sqrt{c}$ همچنین، ثابت کنید، برای $n > 1$، مقدار x_{n+1} به c نزدیك‌تر است تا مقدار x_n؛ درواقع، داریم: $x_{n+1} - \sqrt{c} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{c})$.

۱۰۰A. درمورد سه‌تایی‌های $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$، می‌گوییم، وقتی $A > B$ که، دست‌کم، ۵ نابرابری از ۹ نابرابری $a_i > b_j$

برقرار باشند $(i, j = ۱, ۲, ۳)$. آیا، برای نابرابرهایی که به‌این ترتیب تعریف شده باشند، ویژگی سرایت‌پذیری وجود دارد؟ یعنی، آیا از $A>B$ و $B>C$، می‌توان نتیجه گرفت $A>C$؟ اگر پاسخ مثبت است، آن را ثابت کنید، و اگر پاسخ منفی است، یک‌مثال متناقض بیاورید.

۵۰۱. نماد سیگما. اغلب، با مجموع‌هایی برخورد می‌کنیم که به‌این صورت‌ها هستند:

$$a_۱+a_۲+a_۳+\ldots+a_۹ \quad \text{یا} \quad x_۱y_۱+x_۲y_۲+x_۳y_۳+\ldots+x_ny_n$$

مطابق‌معمول، می‌توان هر جملهٔ دلخواه از این مجموع‌ها را، مثلاً به‌صورت $a_i\,(i=۱, ۲, \ldots, ۹)$ یا $x_iy_j\,(j=۱, ۲, \ldots, n)$ نشان داد. خود مجموع‌ها را، با نماد سیگما $(\sum)$ نشان می‌دهند:

$$\sum_{i=۱}^{۹} a_i = a_۱+a_۲+\ldots+a_۹$$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_jy_j = x_۱y_۱+x_۲y_۲+\ldots+x_ny_n$$

نمونه‌های زیر را می‌توان، به‌سادگی، و با استفاده از روشهای جبرمقدماتی، ثابت کرد:

$$\sum_{i=۱}^{۹} ca_i = c\sum_{i=۱}^{۹} a_i, \quad \sum_{i=۱}^{۹}(c+a_i) = ۹c+\sum_{i=۱}^{۹} a_i,$$

$$\sum_{۱}^{n}(x_j-y_j)^۲ = \sum_{۱}^{n} x_j^۲ - ۲\sum_{۱}^{n} x_jy_j + \sum_{۱}^{n} y_j^۲$$

اتحاد اخیر، اندیس j را ننوشته‌ایم، زیرا منظور خودبه‌خود روشن می‌شود. همچنین $\sum_{۱}^{۱۰۰} j^۲$، به‌معنای مجموع مجذورهای عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ است، یعنی

$$\sum_{۱}^{۱۰۰} j^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+۱۰۰^۲$$

فصل دوم

نتیجه‌گیری‌های سادهٔ جبری

۱.۲. مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌ها. مسالهٔ پیدا کردن دو عددی را مطرح می‌کنیم که مجموع آن‌ها برابر ۶۰ و حاصل‌ضربشان حداکثر مقدار ممکن باشد. پاسخ مساله، دو عدد ۳۰ و ۳۰ است. هر دو عدد دیگری به‌مجموع ۶۰، مثلاً ۲۰ و ۴۰، حاصل‌ضرب کمتری دارند. اگر مساله را اندکی تعمیم دهیم و بخواهیم سه عدد به‌مجموع ۶۰ را طوری پیدا کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها، حداکثر مقدار ممکن باشد، برای پاسخ، به‌عددهای ۲۰، ۲۰ و ۲۰ می‌رسیم. برای چهار عدد به‌مجموع ۶۰ و حاصل‌ضرب حداکثر، عددهای ۱۵، ۱۵، ۱۵ و ۱۵ به‌دست می‌آیند. اندیشهٔ این مساله روشن است: عددهایی با مجموع ثابت، وقتی به‌ماکزیمم حاصل‌ضرب خود می‌رسند که با هم برابر باشند. و این، یکی از اساسی‌ترین گزاره‌های این فصل است. گزارهٔ مشابه آن، پیدا کردن عددهایی با حاصل‌ضرب ثابت، وقتی که مجموع آن‌ها می‌نیمم باشد، بحث اصلی دیگری از این فصل است.

مجموع را با حاصل‌ضرب عوض و مساله را به‌گونهٔ دیگری مطرح می‌کنیم: می‌خواهیم دو عدد مثبت با حاصل‌ضرب ۶۴ را طوری پیدا کنیم که مجموع آن‌ها، حداقل مقدار ممکن باشد. پاسخ، ۸ و ۸ است. چرا در این‌جا، حداقل مقدار مجموع را مطرح کردیم؟ چرا نخواستیم، مجموع، حداکثر مقدار ممکن باشد، اندکی دقت، روشن می‌کند که، برای مجموع، حداکثری وجود ندارد، یعنی مجموع را، به‌هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم بزرگ کنیم. مثلاً، دو عدد ۶۴۰۰۰ و ۰/۰۰۱ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب این دو عدد، همان ۶۴ است، در حالی که مجموعی نسبتاً بزرگ دارند. جفت عددهای با حاصل‌ضرب ۶۴ و مجموع‌های باز هم بزرگ‌تر را، می‌توان به‌آسانی و با روش‌های مختلف به‌دست آورد.

تعمیم طبیعی این مساله، عبارت است از جست وجوی سه‌عدد مثبت با حاصل‌ضرب ۶۴، به‌نحوی‌که مجموعی می‌نیمم داشته باشند. باز هم باید سه‌عدد برابر پیدا کنیم و، بنابراین، به‌پاسخ ۴، ۴ و ۴ می‌رسیم. تعمیم کامل این مساله واثبات آن را دراین‌فصل خواهیم آورد وخواهیم دیدکه بسیاری از مساله‌های جبری را می‌توان به‌کمك آن حل‌کرد. کاربردهای هندسی آن را، درفصل بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نـابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وهندسی، مبنایی است‌که می‌توان استدلال‌هـای خود را براساس آن قرار داد. اگر n عدد درنظر بگیریم ومجموع آن‌ها را بر تعداد آن‌ها تقسیم کنیم، عددی بـه دست می‌آیدکـه آن را واسطهٔ حسابی این n عـدد گویند. به‌این‌ترتیب، واسطهٔ حسابی (یا میانگین حسابـی) n عدد a_1، a_2، ...، a_n، برابر است با $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ که آن‌را با A نشان می‌دهیم. واسطهٔ هندسی را معمولاً، برای عددهای غیرمنفی درنظر می‌گیرند: واسطهٔ‌هندسی n عدد a_1، a_2، ...، a_n بـرابر است با $(a_1.a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$ کـه بـا G نشـان می‌دهیم. بین واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی، نابرابری $A\geqslant G$ وجوددارد وعلامت‌برابری‌وقتی،وتنهاوقتی، برقراراست‌که همهٔ‌عددهای a_1، a_2، ...، a_n باهم برابر باشند. دراین‌فصل، اثبات وکاربردهای این نابرابری را خواهید دید. سپس، با گونه‌های دیگر واسطه‌ها آشنا خواهید شد وسرانجام به‌تجزیه وتحلیل عدد ثابت e، که در ریاضیات بی‌اندازه مهم واساسی است،می‌رسید.

۲.۰۲ هرمربع‌کامل، مثبت یا صفر است. مربع هـر عدد حقیقی، عددی مثبت یا صفر است. علاوه براین، وقتی وتنها وقتی یك‌مربع‌کامل برابرصفر می‌شودکه خود عدد برابر صفر باشد، یعنی $a^2=0$، تنها اگر $a=0$. همین مطلب ساده، می‌تواند ما را به‌برخی نتیجه‌های اساسی برساند.

قضیه ۲.۰۲-a. برای هرمقدار ثابت c، ماکزیمم مقدار $cx-x^2$، در مجموعهٔ‌عددهای‌حقیقی‌x، برابراست با $\frac{c^2}{4}$ وبه‌ازای $x=\frac{c}{2}$ به‌دست می‌آید.

عبارت $cx-x^2$ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$cx-x^2=\frac{c^2}{4}-\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

وچون $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 \geqslant 0$، بنابراین، حداکثرمقدارممکن برای $cx-x^2$، همان $\frac{c^2}{4}$ است؛ و روشن است که وقتی به‌این حداکثر می‌رسدکه $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2$ کمترین مقدار ممکن، یعنی ۰ را قبول کندکه ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $x=\frac{c}{2}$. برای $cx-x^2$، کمترین مقدار وجود ندارد، زیرا هرچه x را بزرگتر بگیریم، مقدار آن کوچکتر می‌شود.

این‌قضیه را، برای حالتی‌هم‌که جملهٔ x^2 ضریبی داشته باشد، می‌توان به‌کار برد، زیرا می‌توان آن را به صورت $cx-ax^2$ تبدیل کرد. مثلاً، برای پیدا کردن حداکثر مقدار $24x-4x^2$، آن را به‌صورت $4(6x-x^2)$ می‌نویسیم؛ وچون حداکثر مقدار $6x-x^2$ به‌ازای $x=3$ به‌دست می‌آید، بنابراین، حداکثرمقدارعبارت $24-4x^2$ برابر است با ۳۶. به‌همین‌ترتیب، می‌توان قضیه‌را برای‌حالتی‌هم‌که عبارت مفروض، شامل مقدار ثابت باشد، به‌کاربرد. مثلاً، عبارت $50+24x-4x^2$ را درنظربگیرید. حداکثرمقدار عبارت $24x-4x^2$ برابر است با ۳۶ و، بنابراین، حداکثر مقدار عبارت $50+24x-x^2$ برابر ۸۶ می‌شود.

نتیجهٔ ۱. می‌نیمم عبارت x^2-cx، در حوزهٔ عددهای حقیقی، برابر است با $-\frac{c^2}{4}$ وبه‌ازای $x=\frac{c}{2}$ به‌دست می‌آید.

درواقع، x^2-cx، قرینهٔ $cx-x^2$ است و، بنابراین، حداقل مقدار عبارت اول درنقطه‌ای به‌دست می‌آیدکه دومی به‌حداکثر خود می‌رسد، یعنی در نقطهٔ $x=\frac{c}{2}$.

نتیجهٔ ۲. اگرمجموع دومتغیر x و y، مقدارثابتی باشد: $x+y=c$، آن‌وقت، حاصل‌ضرب xy، وقتی بـه‌حداکثر مقدار خـود می‌رسد که این دو متغیر باهم برابر باشند: $x=y=\frac{c}{۲}$.

در واقع، ازبرابری $x+y=c$ به‌دست می‌آید: $y=c-x$؛ بنابراین $xy=cx-x^۲$. باتـوجه به‌قضیه‌ای که ثابت کردیم، حداکثر مقدار عبارت $cx-x^۲$ به‌ازای $x=\frac{c}{۲}$ به‌دست‌می‌آید، یعنی $x=y=\frac{c}{۲}$.

نتیجهٔ ۳. اگر حاصل‌ضرب دو متغیر مثبت x و y، مقدار ثابتی باشد: $xy=c$، حداقل مقدار $x+y$، برای $x=y=\sqrt{c}$ بـه دست می‌آید.

از برابری $xy=c$ نتیجه می‌شود $y=\frac{c}{x}$ وبنابراین

$$x+y=x+\frac{c}{x}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{c}{x}}\right)^۲+۲\sqrt{c}$$

و وقتی به‌حداقل‌مقدار $x+y$ می‌رسیم که مربع کامل $\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{c}{x}}\right)^۲$ برابرصفر شود، یعنی $\sqrt{x}=\sqrt{\frac{c}{x}}$، که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x=\sqrt{c}$.

توجه‌کنیم، این نتیجه، مشروط به‌مثبت بودن متغیرهای x و y است؛ بدون این‌شرط، مجموع $x+y$، دارای می‌نیمم نیست. مثلاً، بافرض $xy=۲۵$، به‌شرط مثبت‌بودن xوy، حداقل‌مقدارممکن برای عبارت $x+y$ برابر است با ۱۰، درحالی‌که اگر x و y بتوانند منفی باشند، می‌توان برای $x+y$، عددی به‌دلخواه‌کوچك (ومنفی) پیدا کرد؛ یعنی $x+y$دارای می‌نیمم نیست.

مثال ۱. ثابت کنید، مجموع هرعدد حقیقی مثبت بـا عکس آن عدد، حداقلی برابر ۲ دارد.

حل. xرا عددی مثبت می‌گیریم و می‌خواهیم حداقل مقدار $x+\frac{۱}{x}$را

پیدا کنیم. این عبارت، مجموع دو مقدار مثبت است که حاصل‌ضربی ثابت دارند $\left(x.\frac{1}{x}=1\right)$؛ بنابراین، مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل خود می‌رسد که داشته باشیم: $\frac{1}{x}=x$، یعنی $x=1$ (جواب $x=-1$ را کنار گذاشتیم، زیرا x را مثبت گرفته‌ایم). کمترین مقدار $x+\frac{1}{x}$ برابر ۲ می‌شود.

مثال ۲. اگر a و b، دو عدد مثبت باشند، حداقل عبارت $ax+\frac{b}{x}$ را، درحوزهٔ عددهای حقیقی، پیدا کنید.

حل. در این‌جاهم، بامجموع دو جمله‌ای سروکار داریم که، حاصل‌ضرب آن‌ها، ab، مقداری‌است ثابت. بنابراین این‌مجموع وقتی به‌حداقل خودمی‌رسد که‌داشته باشیم: $ax=\frac{b}{x}$ و یا $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$. به‌ازای این مقدار x، حداقل مقدار مجموع برابر $2\sqrt{ab}$ می‌شود.

مثال ۳. a، b و c، سه‌عدد مثبت‌اند. اگربرای متغیرهای حقیقی x و y داشته باشیم: $ax+by=c$، حداکثر مقدار xy را پیدا کنید.

حل. $u=ax$ و $v=by$ می گیریم، بنابراین برابری $ax+by=c$، به‌صورت $u+v=c$ درمی‌آید. حداکثر مقدار uv وقتی به‌دست می‌آیدداشته باشیم: $u=v=\frac{c}{2}$، ولی

$$uv=abxy \Rightarrow xy=\frac{uv}{ab}$$

بنابراین، حداکثر مقدار uv، حداکثر مقدار xy را هم به‌دست می‌دهد. به‌این‌ترتیب، مقدار xy وقتی به‌حداکثر خود می‌رسدکه

$$u=v=\frac{c}{2}=ax=by$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x=\frac{c}{۲a}$ و $y=\frac{c}{۲b}$؛ وحداکثر مقدار xy برابر با $\frac{c^۲}{۴ab}$ می‌شود.

قضیهٔ ۲۰۲-b. برای‌هر دوعدد حقیقی a و b داریم:

$$a^۲+b^۲\geqslant ۲ab\ ,\ \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲\geqslant ab\ ,\ (a+b)^۲\geqslant ۴ab$$

علامت برابری، درهمه‌حالت‌ها، وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a=b$.
اگر a و b، دوعدد حقیقی غیرمنفی باشند، همیشه داریم:

$$\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$$

وبازهم برابری، برای $a=b$، برقرار است.

نابرابری اخیر، همان نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، برای دو عدد مثبت است. مثبت بودن a و b، دراین‌جا، شرطی لازم است، زیرا مثلاً برای $a=b=-۶$، این نابرابری؛ به‌صورت $\frac{-۶-۶}{۲}\geqslant ۶$ در می‌آید که، به‌روشنی، نادرست است.

اثبات همهٔ این نابرابری‌ها، منجر به‌نابرابری روشن زیر می‌شود:

$$(a-b)^۲\geqslant ۰ \quad \text{یا} \quad a^۲-۲ab+b^۲\geqslant ۰$$

علاوه برآن، معلوم است که نابرابری اکید $(a-b)^۲>۰$، وقتی برقرار است که a و b برابر نباشند. نابرابری $\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$ هم، به‌نابرابری واضح $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geqslant ۰$ منجر می‌شود.

دوباره، به قضیهٔ ۲.۲ — a برمی‌گردیم. دیدیم که ماکزیمم عبارت $cx-x^۲$ برابر است با $\frac{c^۲}{۴}$. در آن‌جا $cx-x^۲$ را به‌عنوان یك‌عبارتِ درجهٔ

دوم درنظر گرفته بودیم؛ ولی می‌توان این‌عبارت را، به‌صورت ضرب‌دوعامل $c-x$ و x درنظر گرفت که مجموعی ثابت دارند و، بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسدکه داشته باشیم: $c-x=x$، یعنی $x=\frac{c}{۲}$.

اکنون فرض کنیدکه با سه‌عامل مثبت سروکار داشته باشیم، به‌نحوی که مجموع آن‌ها، مقداری ثابت باشد. آیا دراین‌جاهم، حاصل‌ضرب وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسدکه این عامل‌ها باهم برابر باشند؟ در واقع، پاسخ به‌این پرسش، مثبت است. علاوه‌برآن، می‌توان ازهمین اندیشه، برای حالت‌هایی‌که با چهارعامل، پنج عامل و یا بیشتر سروکار داشته باشیم، استفاده‌کرد. ما تعمیم قضیهٔ ۲.۲-a را در بخش‌های بعدی کتاب، خواهیم آورد.

B.۱. a، b و c، سه‌عدد ثابت مثبت‌اند. برای همهٔ عددهای مثبت x و y به‌حاصل‌ضرب c، حداقل مقدار عبارت $ax+by$ را پیدا کنید.

B.۲. a، b و c،سه‌عددحقیقی‌اندکه‌هرسه باهم‌برابر نیستند، ثابت کنید:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}>ab+ac+bc$$

B.۳. عددی حقیقی پیدا کنیدکه تفاضل مجذور آن از خود عدد، بیشترین مقدار ممکن باشد.

B.۴. بنا برتعریف، واسطهٔ توافقی دوعدد مثبت a و b، عبارت‌است ازعکس واسطهٔ حسابی عکس‌های آن دوعدد، یعنی $\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$، که می‌توان آن را به صورت $\frac{۲ab}{a+b}$ نوشت. ثابت کنید، به‌شرط $a\neq b$، واسطهٔ توافقی دو عدد مثبت، از واسطهٔ هندسی آن‌ها کوچکتر است، یعنی

$$\frac{a+b}{۲}>\sqrt{ab}>\frac{۲ab}{a+b}$$

درحالت $a=b$، این واسطه‌ها، باهم برابر می‌شوند.

B۰۵۰ c عددی است مثبت و می‌دانیم $xy=c$؛ حداقل مقدار $x^{4}+2y^{4}$ را برای مقدارهای مثبت x و y پیدا کنید.

B۰۶۰ برای عددهای ثابت a، b و c، حداقل عبارت

$$x^{2}+y^{2}+ax+by+c$$

را برای عددهای حقیقی x و y پیدا کنید.

B۰۷۰ برای هرمقدار مثبت c، ثابت کنید، وقتی‌که x به مقدار کمی افزایش پیدا کند، $2cx-x^{2}$ کاهش و $x+\frac{c^{2}}{x}$ افزایش می‌یابد. درحالتی‌که x به‌مقدار کمی کاهش پیدا کند، چه‌نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

B۰۸۰ برای عددهای حقیقی x، y، s و t می‌دانیم: $x^{2}+y^{2}=1$ و $r^{2}+s^{2}=1$. ماکزیمم مقدار $xr+sy$ را پیداکنید.

B۰۹۰ اگر x و y با شرط $20x+y=180$ سازگار باشند. حداکثر مقدار ممکن را برای xy پیدا کنید.

B۰۱۰۰ کامیون سنگین درمسیری ۴۰۰ مایلی، باسرعتی ثابت حرکت می‌کند. دراین مسیر، حداقل سرعت ۳۵ وحداکثر سرعت ۵۰ مایل تعیین شده است. اگر سرعت کامیون درهرساعت x مایل باشد، ساعتی $\frac{x^{2}}{300}+\frac{x}{40}+1$ گالن بنزین مصرف می‌کند. قیمت هر گالن سوخت k دلار و دستمزد رانندهٔ کامیون، $8k$ دلار درهرساعت است. کامیون باچه‌سرعتی حرکت‌کند تاهزینه رفت‌وآمد، به‌حداقل‌مقدارممکن برسد؟ (هزینه‌رفت‌وآمد، شامل پول سوخت و دستمزد راننده است.)

۲۰۳. نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی. به اثبات نابرابری اساسی واسطه‌های حسابی و هندسی می‌پردازیم که کاربردهای زیادی درمساله‌های ماکزیمم و می‌نیمم دارند. نابرابری به‌صورت $A\geqslant G$ است که، درآن، A واسطهٔ حسابی و G واسطهٔ هندسی مجموعه‌ای متناهی ازعددهای غیرمنفی

است. حالت خاصی را، که تنها با دوعدد غیرمنفی a و b سروکار داشته باشیم، قبلاً ثابت کردیم: $\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$.

دراین‌جا، اثباتی را برای حالت کلی $A\geqslant G$ می‌آوریم که، اگرچه کوتاه‌ترین راه نیست، ولی درعوض، از همه راه‌های دیگر ساده‌تر و قابل هضم‌تر است. البته، به‌دنبال آن، اثبات‌های دیگری را هم خواهیم آورد.

قضیه ۳۰۲-a. Aرا واسطهٔ‌حسابی و Gرا واسطهٔ‌هندسی n عددغیرمنفی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می گیریم:

$$A=\frac{a_۱+a_۲+\ldots+a_n}{n}\ ,\ G=(a_۱.a_۲\ldots a_n)^{\frac{۱}{n}} \qquad (۱)$$

ثابت کنید $A\geqslant G$؛ علامت برابری تنها برای حالت $a_۱=a_۲=\ldots=a_n$ است.

درحالت $a_۱=a_۲=\ldots=a_n$، با توجه به (۱)، به‌سادگی به‌دست می‌آید: $A=G$. بنابراین، ازاین‌جا به‌بعد، فرض می‌کنیم، همهٔ aها باهم برابر نباشند و ثابت می‌کنیم که؛ دراین‌صورت: $A>G$. به‌جای نابرابری $A>G$، می‌توان نابرابری $G^n<A^n$ را ثابت کرد، یعنی

$$a_۱a_۲\ldots a_n<A^n \qquad (۲)$$

دراین نابرابری، می‌توان در n گام متوالی، با تبدیل عامل‌های سمت‌چپ، به‌نحوی که مجموع آن‌ها تغییر نکند، به‌تدریج به A^n نزدیک شد. تغییر عامل‌ها را، براساس قاعدهٔ زیر انجام می‌دهیم:

قاعده. درحاصل‌ضرب n عدد، کوچکترین عدد را x و بزرگترین عدد را y فرض می‌کنیم؛ دراین‌صورت، x را به A و y را به $x+y-A$ تبدیل می‌کنیم (A، واسطهٔ حسابی عددهاست). با تکرار این قاعده، حاصل‌ضرب سمت‌چپ، گام به گام، به A^n نزدیک‌تر می‌شود.

برای روشن‌شدن مطلب، دومثال می‌آوریم.

مثال ۱. نابرابری $۲\times۳\times۴\times۶\times۲۰<۷^۵$، حالت خاصی از ازنابرابری(۲) است. اگرازقاعدهٔ فوق، به‌ترتیب، استفاده کنیم، پشت‌سرهم

به‌دست می‌آید:

$$۲\times۳\times۴\times۶\times۲۰<۳\times۴\times۶\times۷\times۱۵$$
$$<۴\times۶\times۷\times۷\times۱۱$$
$$<۶\times۷\times۷\times۷\times۸$$
$$<۷\times۷\times۷\times۷\times۷$$

واسطهٔ حسابی پنج عدد، درهرکدام ازضرب‌ها، برابر است با ۷. در ابتدا، کوچکترین‌عدد برابر ۲ وبزرگترین‌عدد برابر ۲۰ است که، به‌ترتیب به‌جای آن‌ها، عددهای۷و۱۵ راگذاشته‌ایم $(x+y-A=۲+۲۰-۷=۱۵)$. درگام دوم کوچکترین و بزرگترین عددها، به‌ترتیب برابر ۳ و ۱۵ هستند که، به‌جای‌آن‌ها، ۷ و ۱۱را گذاشته‌ایم $(x+y-A=۳+۱۵-۷=۱۱)$. درمورد گام‌های بعدی، خودتان دقت کنید.

[البته، درستی نابرابری $۲\times۳\times۴\times۶\times۲۰<۷^۵$ را می‌توان، با محاسبهٔ مستقیم، ثابت کرد. ولی در مورد نابرابری کلی(۲)، چنین راه مستقیمی وجود ندارد و ما، درستی‌آن‌را، همان‌طورکه خواهید دید، به‌کمك قاعدهٔ بالا، ثابت خواهیم کرد.]

مثال ۲. نابرابری $۱\times۶\times۷\times۱۰\times۱۱\times۱۹<۹^۶$ هم، حالت خاصی ازنابرابری (۲) است. با استفاده ازقاعدهٔ فوق، به‌ترتیب، داریم:

$$۱\times۶\times۷\times۱۰\times۱۱\times۱۹<۶\times۷\times۹\times۱۰\times۱۱\times۱۱$$
$$<۷\times۸\times۹\times۹\times۱۰\times۱۱$$
$$<۸\times۹\times۹\times۹\times۹\times۱۰$$
$$<۹\times۹\times۹\times۹\times۹\times۹$$

توجه کنید: بنابرقاعده، کوچکترین وبزرگترین‌عدد x و y را، درضرب عامل‌ها، به دوعدد A و $x+y-A$ تبدیل می‌کنیم که، بازهم، مجموع آن‌ها، همان $x+y$ است. بنابراین، وقتی که قاعده را دربارهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n به‌کار می‌بریم، درواقع، حاصل‌ضرب n عامل با واسطهٔ عددی

A را، به‌حاصل‌ضرب n عـامل دیگر تبدیل می‌کنیم‌که همان واسطهٔ حسابی A را دارند. چرا حـاصل‌ضرب جدید، بزرگتر است؟ بـرای روشن‌شدن این مطلب، باید ثابت کنیم:

$$xy < A(x+y-A) \qquad (۳)$$

این نابرابری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$0 < Ax + Ay - A^2 - xy \Rightarrow 0 < (A-x)(y-A) \qquad (۴)$$

که درستی‌آن روشن است، زیرا هم $A-x$ مثبت است وهم $y-A$ [واسطهٔ حسابی n عدد، بین کوچکترین وبزرگترین عددها قرار دارد: $x<A<y$]. درضمن، با استفادهٔ متوالی ازاین قاعده، حاصل‌ضرب $a_1 . a_2 ... a_n$، سرانجام به‌A^n می‌رسد، زیرا درهرگام، یك یاچند عامل برابر A، درآن ظاهرمی‌شود (همان‌طورکه در دومثال بالادیدیم). به‌این‌ترتیب، قضیهٔ ۳.۲-a و درستی نابرابری (۲) ثابت می‌شود.

نتیجهٔ۱: اگر a_1، a_2، ...، a_n عددهایی‌غیرمنفی باشند، همیشه‌داریم:

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n \geqslant a_1 . a_2 ... a_n$$

وعلامت برابری، تنها وقتی برقرار است‌که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

این‌نتیجه، با به‌کاربردن نـابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، در موردعددهای a_1^n، a_2^n، ...، a_n^n به‌دست‌می‌آید. دراین‌حالت: $G = a_1 a_2 ... a_n$.

B.۱۱۰. تفسیرتازه‌ای ازنابرابری‌واسطه‌های‌حسابی‌وهندسی‌می‌آوریم. حالت برابری عددها را کنار می‌گذاریم ونابرابری $A>G$ را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$nA > nG \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n > G + G + ... + G$$

مجموع سمت چپ را، به‌این‌ترتیب، پشت‌سرهم تغییر می‌دهیم: درهر گام، به‌جـای x و y ـ کوچکترین و بـزرگترین عـدد موجود در مجموع ـ

به‌ترتیب G و $\frac{xy}{G}$ قرار می‌دهیم. روشن است که، دراین‌صورت، واسطهٔ هندسی آن‌ها تغییر نمی‌کند.

مثلاً، برای عددهای موجود درمجموع ۱۴۴+۸+۶+۳، واسطهٔ هندسی برابر ۱۲ $= G$ است. بنابراین، درگام اول، عددهای ۳ و ۱۴۴ را، به‌ترتیب، باعددهای ۱۲ و ۳۶ عوض می‌کنیم، به‌مجموع ۳۶+۱۲+۸+۶ می‌رسیم. ثابت کنید که، درحالت کلی، این روند، هرمجموعی را به مجموعی کمتر ازخود تبدیل می‌کند.

۴.۲. روشی دیگر. اکنون، روشی‌دیگر، برای‌اثبات درستی‌نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی، می‌آوریم. ازاین‌روش، برای نخستین‌بار، کوشی استفاده کرد. دراین‌بند، اثبات کوشی را برای حالت‌های خاص ۴$=n$ و ۳$=n$ و، سپس، دربند بعد، حالت کلی اثبات کوشی را ذکر می‌کنیم. روش اثبات‌کوشی، تاحدی دور از ذهن‌است و، به‌همین‌مناسبت، حالت‌های‌خاص، می‌توانند ورودی به مطلب باشند و درک آن را ساده‌تر کنند. درضمن، این حالت‌های خاص، دراثبات‌کلی نابرابری، مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a+b+c+d}{۴}\geqslant(abcd)^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۱)$$

علامت برابری، وقتی برقراراست که عددهای غیرمنفی a، b، c و d، همه با هم‌برابر باشند. چون حالت برابری، برای $a=b=c=d$، روشن‌است، تنها به‌حالتی می‌پردازیم که همهٔ عددها، باهم برابر نباشند. مثلاً فرض می‌کنیم $a\neq b$ و به‌اثبات نابرابری، درحالت اکید خود می‌پردازیم، می‌دانیم:

$$a+b>۲\sqrt{ab} \quad \text{و} \quad c+d\geqslant۲\sqrt{cd} \qquad (۲)$$

اگر این‌دو نابرابری را باهم جمع، و، سپس، دوطرف را بر ۲ بخش کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+b+c+d}{۲}>\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \qquad (۳)$$

اکنون، اگر از نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، برای دو عدد $\sqrt{ab}$، $\sqrt{cd}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\geqslant ۲\sqrt[۴]{abcd} \qquad (۴)$$

و باتوجه به‌دو نابرابری‌های (۳) و (۴)، به‌نابرابری (۱)، منتهی به‌صورت اکید خود، می‌رسیم:

اکنون، ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a+b+c}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{abc} \qquad (۵)$$

دراین‌جاهم، چون حالت برابری برای $a=b=c$ روشن است، $a\neq b$ می‌گیریم ونابرابری را درحالت‌اکید خود ثابت‌می‌کنیم. درنابرابری (۱)، d را برابر $\sqrt[۳]{abc}$ می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+b+c+\sqrt[۳]{abc}}{۴}>(abc\sqrt[۳]{abc})^{\frac{۱}{۴}}$$

سمت‌راست‌نابرابری، به‌صورت $\sqrt[۳]{abc}$ درمی‌آیدواگردوطرف‌راچهاربرابرکنیم:

$$a+b+c+\sqrt[۳]{abc}>۴\sqrt[۳]{abc} \Rightarrow a+b+c>۳\sqrt[۳]{abc}$$

که همان نابرابری (۵)، منتهی به‌صورت اکید آن است.

این نحوهٔ استدلال را، آگستن‌کوشی (Augustin Cauchy) (۱۸۵۷-۱۷۷۹)، ریاضیدان فرانسوی، درکتاب «دورهٔ آنالیز» خود آورده است (چاپ ۱۸۲۱). بحث اصلی این‌کتاب، حساب دیفرانسیل و انتگرال است‌که، با تفاوتی اندك، به‌همان صورت امروزی آن، آمده است. کوشی را باید از پیش‌گامان برجسته، در اثبات‌های ریاضی دانست. کارهای او در شاخه‌های مختلف ریاضیات رشته‌های نامتناهی، معادله‌های دیفرانسیلی

و نظریهٔ تابع‌های مختلط، سرآمد دیگران است. او همچنین، تهیه‌کننده و ویراستار مجلهٔ فرانسوی «Journal Comptes Rendus» بود و با پرکاری خود، همهٔ دشواری‌های آن را حل می‌کرد.

۵.۲. اثبات کوشی. با تعمیم روش استدلالی بندقبلی، می‌توان اثبات دیگری برای درستی نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی پیدا کرد.

اثبات براساس روش استقرای ریاضی، منتهی به‌صورت خاص، استوار است. گزارهٔ P_n را بـه‌این معنا می‌گیریم که: اگـر عـددهای غیر منفی $a_۱$، $a_۲$،...، a_n، همه باهم برابر نباشند، داریم:

$$a_۱+a_۲+\dots+a_n>n(a_۱a_۲\dots a_n)^{\frac{۱}{n}} \qquad (۱)$$

آغازاستقرا، برقراری گزارهٔ $P_۲$ است که، قبلاً، آن را ثابت کرده‌ایم. اثبات برقراری گـزاره‌هـای $P_۳$ و $P_۴$ را هم، بـه‌عنوان تمرین، دربند قبل آوردیم. بنابراین، بایدثابت کنیم، P_n، به‌ازای $n\geqslant ۳$، برقرار است. اثبات شامل دو مرحله است:

مرحلهٔ اول: اگر P_n، برای عـدد درست مثبتی مثل $n\geqslant ۳$ برقرار باشد. آن‌گاه، $P_{n-۱}$ هم برقرار است؛

مرحلهٔ دوم: اگـر گـزارهٔ P_n بـرای عدد درست و مثبتی مثل $n\geqslant ۲$ برقرار باشد، آن‌گاه، برای $P_{۲n}$ هم برقرار است.

قبل از اثبات این دومرحله، نشان می‌دهیم که، اثبات آن‌ها، به‌معنای درستی گزارهٔ P_n برای‌هرمقدار درست ومثبت n است. می‌دانیم، $P_۲$ برقرار است، یعنی باتوجه به‌مرحلهٔ دوم، درستی همهٔ این گزاره‌ها تایید می‌شود:

$$P_۲,\ P_۴,\ P_۸,\ P_{۱۶},\ P_{۳۲},\ P_{۶۴},\ P_{۱۲۸},\dots \qquad (۲)$$

بنابراین، این می‌ماند که فاصله‌های بین‌زوج‌های‌متوالی این دنباله را پرکنیم که آن هم، به‌کمك مرحلهٔ اول به‌دست می‌آیـد. مثلاً، فرض کنید بخواهیم درستی گزارهٔ $P_{۵۷}$ را ثابت کنیم. باتوجه به(۲) درستی $P_{۶۴}$ تایید شده‌است. اکنون، باتوجه به‌مرحلهٔ اول، از درستی $P_{۶۴}$، درستی $P_{۶۳}$ نتیجه می‌شود.

سپس، از درستی P_{63} به‌درستی P_{62} می‌رسیم و، به‌همین‌ترتیب، اگراستدلال خود را ادامه دهیم، به‌درستی P_{58} و، سرانجام، درستی گزارهٔ P_{57} خواهیم رسید.

این روش اثبات استقرایی را، استقرای دوطرفه گویند، یعنی استقرایی که هم‌رو به‌بالا دارد وهم‌رو به‌پایین. ابتدا، بافرض درستی گزارهٔ P_2، درستی گزاره‌های (۲) را ثابت می‌کنیم (استقرای رو به‌بالا) و، سپس، طبق مرحلهٔ اول، با عبور از P_n به P_{n-1} (استقرای رو به‌پائین)، ثابت می‌کنیم که P_n؛ برای همه عددهای درست ومثبت n، برقرار است.

ابتدا ثابت‌می‌کنیم که درستی گزارهٔ P_n، به‌معنای درستی گزارهٔ P_{n-1} است. نمونه‌ای ازاین اثبات را دربند قبل دیدیم؛ درآن‌جا ثابت کردیم که از درستی گزارهٔ P_4، می‌توان درستی گزارهٔ P_3 را نتیجه گرفت بدون این که به کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد $a_1 \neq a_2$. در نابرابری مفروض (۱)، به‌جای a_n، واسطهٔ هندسی $n-1$ عدد دیگر، یعنی a_1، a_2، ...، a_{n-1} را قرار می‌دهیم. این واسطهٔ هندسی را g می‌نامیم:

$$g=(a_1a_2\ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \qquad (3)$$

درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+g>n(a_1a_2\ldots a_{n-1}g)^{\frac{1}{n}} \qquad (4)$$

سمت راست نابرابری (۴)، برابر است با

$$n(g^{n-1}g)^{\frac{1}{n}}=n(g^n)^{\frac{1}{n}}=ng$$

وبنابراین، نابرابری (۴)، چنین می‌شود:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+g>ng \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}>(n-1)g$$

و این همان رابطهٔ (۱)، با تبدیل n به $n-1$ است؛ یعنی گزارهٔ P_{n-1} درست است.

اکنون ثابت می‌کنیم که با درستی P_n، می‌توان درستی P_{2n} را نتیجه گرفت. نمونه‌ای از استدلال دراین مورد را هم، دربند قبل، با عبور از P_2

به P_4، دیده‌ایم. دوباره $a_1 \neq a_2$ می‌گیریم، باید ثابت کنیم:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2n}>2n(a_1a_2\ldots a_{2n})^{\frac{1}{2n}} \qquad (5)$$

این نابرابری‌ها را ثابت کرده‌ایم:

$$a_1+a_2>2\sqrt{a_1a_2},\ a_3+a_4\geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{a_3a_4},\ldots,\ a_{2n-1}+a_{2n}\geqslant 2\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}$$

از مجموع این نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2n}>2[\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\ldots+\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}] \qquad (6)$$

درسمت‌راست نابرابری، در داخل کروشه، n جمله داریم؛ وچون گزارهٔ P_n را درست فرض کرده‌ایم، می‌توان نوشت:

$$2[\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\ldots+\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}]\geqslant 2n(a_1a_2\ldots a_{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

(دراین‌جا، امکان برابری برای همهٔ جمله‌های داخل کروشه در رابطهٔ (۶)، وجود دارد). باتوجه به‌این نابرابری ونابرابری (۶)، نتیجه می‌شود:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2n}>2n(a_1a_2\ldots a_{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

و این، به‌معنای درستی گزارهٔ P_{2n} است.

۲.۶. روش‌هایی برای پیدا کردن اکسترمم. اکنون تلاش می‌کنیم، از نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی، برای پیدا کردن ماکزیمم‌ومی‌نیمم در مساله‌ها، استفاده کنیم. دراین‌فصل به‌کاربردهای جبری این نابرابری و درفصل بعد، به‌کاربردهای هندسی آن می‌پردازیم.

قضیه۲.۶-a. اگر n تابع مثبت‌دارای‌حاصل‌ضربی ثابت باشند،مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل مقدارخود می‌رسدکه بتوان تابع‌ها را طوری تنظیم‌کرد که باهم برابر باشند. ازطرف دیگر، اگر n تابع مثبت، مجموع ثابتی‌داشته باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسدکه بتوان آن‌ها را طوری تنظیم‌کردکه باهم برابر باشند.

تابعی را مثبت می‌نامیم که، در دامنهٔ تعریف خود، مقدارهای مثبت را قبول کند. روشن است که، منظور از نماد n، هرعدد درست و مثبت است. این قضیه، برای مجموعه‌ای نامتناهی از تابع‌ها، ممکن است درست نباشد. پیش از اثبات قضیه، دو مثال می‌آوریم.

می‌خواهیم حداقل مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ را به‌دست آوریم، به‌شرطی که x و y و z، در رابطهٔ $xyz=k^۳$ صدق کنند (k، عددی ثابت و مثبت است). این مسأله، تفسیر هندسی ساده‌ای دارد: کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبداء مختصات را، ازسطح فضایی $xyz=k^۳$ پیدا کنید. فاصلهٔ مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ از نقطهٔ (x,y,z)، برابراست با $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$. برای یافتن کوتاه‌ترین فاصله، کافی است کمتر مقدار مربع آن، یعنی $x^۲+y^۲+z^۲$ را به‌دست آوریم.

$x^۲+y^۲+z^۲$، مجموع تابع‌هایی مثبت است که حاصل ضرب آن‌ها، مقداری است ثابت و برابر $k^۶$. بنابراین، این مجموع وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم: $x^۲=y^۲=z^۲$، این دو معادله، همراه با معادلهٔ $xyz=k^۳$، منجربه $x^۲=y^۲=z^۲=k^۲$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۳k^۲$ می‌شوند.

به‌مثال دوم، بپردازیم.

اگر x و y و z، متغیرهای حقیقی مثبتی باشند، حداقل مقدار $\frac{x}{y}+\frac{۳y}{z}+\frac{۹z}{x}$ را پیدا کنید.

دراین‌جاهم، بامجموعی ازتابع‌های مثبت سروکار داریم که حاصل‌ضربی برابر مقدار ثابت ۲۷ دارند. بنابراین، مجموع، وقتی به‌حداقل خودمی‌رسد که داشته‌باشیم: $\frac{x}{y}=\frac{۳y}{z}=\frac{۹z}{x}$. با سه کسر برابر سروکار داریم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۷ است، بنابراین، هریك ازکسرها برابر ۳ می‌شوند:

$$\frac{x}{y}=\frac{۳y}{z}=\frac{۹z}{x}=۳$$

که‌درنتیجه، مجموع آن‌ها، (یعنی، حداقل این مجموع) برابر ۹ خواهد شد.

[دراین مساله، برای x و y و z، مجموعه‌ای نامتناهی از جواب‌ها وجود دارد. می‌توان یکی ازآن‌ها را به‌دلخواه انتخاب‌کرد و، سپس، دوتای دیگر را به‌دست‌آورد. مثلاً اگر فرض کنیم $z=۱$، آن‌وقت به‌دست‌می‌آید: $x=۳$ و $y=۱$.]

اکنون، به‌اثبات قضیه می‌پردازیم. در واقع، اثبات این‌قضیه، کاربرد ساده‌ای ازنابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی است. $f_۱$، $f_۲$، ...، f_n را تابع‌هایی مثبت با حاصل‌ضرب ثابت فرض می‌کنیم: $f_۱ \cdot f_۲ \dots f_n = c$.

اگر A و G را، به‌ترتیب، واسطه‌های حسابی و هندسی $f_۱$، $f_۲$، ...، f_n بگیریم، آن‌وقت $G \leqslant A$. دوطرف این نابرابری را در n ضرب می‌کنیم:

$$f_۱+f_۲+\dots+f_n \geqslant n(f_۱ \cdot f_۲ \dots f_n)^{\frac{۱}{n}} = n\sqrt[n]{c}$$

بنابراین، حداقل‌مجموع $f_۱+f_۲+\dots+f_n$، وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$f_۱+f_۲+\dots+f_n = n\sqrt[n]{c}$$

و می‌دانیم، این برابری، تنها وقتی ممکن است‌که

$$f_۱ = f_۲ = \dots = f_n$$

[البته، ممکن است، در مورد مساله‌ای، نتوانیم این تابع‌ها را برابر کنیم، به‌همین مناسبت، درصورت‌قضیه، عبارت «... بتوان تابع‌ها راطوری تنظیم‌کرد...»وجود دارد، در دنبالهٔ این بخش، دربارهٔ این‌محدودیت، صحبت خواهیم کرد.]

برای تکمیل اثبات‌قضیه، تابع‌هایی مثبت با مجموعی ثابت را درنظر می‌گیریم:

$$f_۱+f_۲+\dots+f_n = k$$

نابرابری واسطه‌های‌حسابی وهندسی، یعنی $A \geqslant G$ را، به‌صورت $G^n \leqslant A^n$. برای این تابع‌ها می‌نویسیم:

$$G^n = f_۱ \cdot f_۲ \dots f_n \leqslant A^n = \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

$\left(\frac{k}{n}\right)^n$ مقداری است ثابت، بنابراین، نابرابری بالا به معنای آن است که،

حاصل‌ضرب $f_1 f_2 \dots f_n$، حداکثر می‌تواند برابر $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ شود؛ و روشن است که، وقتی به‌این حداکثر می‌رسدکه بتوانیم داشته باشیم:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n$$

بایدتوجه‌داشت، گاهی‌صورت‌مساله‌چنان‌است که، برای استفاده ازاین قضیه، نیاز به «تغییرهایی» دارد. به‌این مساله توجه کنید: مطلوب است حداقل مقدار $r^4 + s^4 + 2t^2$، درحوزهٔ متغیرهای مثبت r و s و t، به‌شرطی‌که بدانیم $rst = 81$، دراین‌جا r^4، s^4 و $2t^2$، حاصل‌ضرب ثابتی ندارند، باوجود این، با اندکی دقت، می‌توان مساله را حل کرد. مجموع را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$r^4 + s^4 + t^2 + t^2 \qquad (1)$$

اکنون، بامجموع چهارتابع مثبت روبه‌رو هستیم، که حاصل‌ضربی‌ثابت‌دارند:

$$r^4 s^4 . t^2 . t^2 = r^4 s^4 t^4 = 81^4$$

ازاین‌جا روشن می‌شود، برای این که مجموع مفروض به‌حداقل مقدار خود برسد، باید داشته باشیم:

$$r^4 = s^4 = t^2 \quad و \quad rst = 81$$

ازمعادله‌های اول به‌دست می‌آید: $r^2 = s^2 = t$ و $r = s$. بنابراین، معادلهٔ $rst = 81$ به‌صورت $r^4 = 81$ درمی‌آیدو ازآن‌جا

$$r = 3, \; s = 3, \; t = 9$$

و کمترین مقدار عبارت $r^2 + s^4 + 2t^2$ برابر ۳۲۴ می‌شود.

در مثال‌های زیر، برای شما روشن می‌شودکه چگونه می‌توان، در برخی ازمساله‌ها، مجموع‌ها یا حاصل‌ضرب‌ها را تجدید تنظیم کرد تا باقضیهٔ ۶.۲ـa سازگار باشند.

مثال ۱. برای مقدارهای مثبت x و y، حداقل عبارت $\frac{۱۲}{x}+\frac{۱۸}{y}+xy$ را پیدا کنید.

حل. درمجموع، با سه‌جمله سروکار داریم که حاصل‌ضربی ثابت‌دارند:

$$\frac{۱۲}{x}\cdot\frac{۱۸}{y}\cdot xy=۱۲\times ۱۸=۲۱۶$$

بنابراین، مجموع آن‌ها، وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته‌باشیم:

$$\frac{۱۲}{x}=\frac{۱۸}{y}=xy$$

چون حاصل‌ضرب این سه جملهٔ برابر، مساوی ۲۱۶ یا $۶^۳$ شده است، بنابراین

$$\frac{۱۲}{x}=\frac{۱۸}{y}=xy=۶$$

یعنی، حداقل مجموع $\frac{۱۲}{x}+\frac{۱۸}{y}+xy$، برابر است با ۱۸؛ واین‌حداقل، وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم: $x=۲$ و $y=۳$.

مثال ۲. برای‌هرمقدارثابت ومثبت c، حداکثرمقدار $xy(c-x-y)$ را، برای مقدارهای مثبت x و y به‌دست آورید.

حل. ابتدا به‌این نکته توجه‌کنیم که، مقدارهای x و y، باید چنان باشندکه مقدار $(c-x-y)$ عددی منفی نشود، زیرا دراین‌صورت، حاصل‌ضرب $xy(c-x-y)$ منفی‌می‌شود وماکزیممی ندارد. به‌این‌ترتیب، x، y و $c-x-y$، مقدارهایی مثبت‌اند وچون، مجموع‌آن‌ها، برابرمقدار ثابت c است، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی‌به‌ماکزیمم‌خود می‌رسد که داشته‌باشیم: $x=y=c-x-y$ که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x=y=\frac{c}{۳}$. حداکثر مقدار عبارت مفروض، برابر است با $\left(\frac{c}{۳}\right)^۳$.

مثال۳. اگر a، عددی ثابت و مثبت باشد، حداقل مقدار عبارت $x^۲+\frac{a}{x}$ را، برای $x>۰$، پیدا کنید.

حل. $x^۲$ و $\frac{a}{x}$، دارای مجموع ثابتی نیستند، ولی اگر مجموع را به‌صورت $x^۲+\frac{a}{۲x}+\frac{a}{۲x}$ بنویسیم، حاصل‌ضرب سه جملهٔ آن، مقداری ثابت می‌شود (برابر با $\frac{a^۲}{۴}$). بنابراین، مجموع وقتی می‌نیمم می‌شود که داشته باشیم:

$$x^۲=\frac{a}{۲x}=\frac{a}{۲x} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$$

بنابراین، کمترین مقدار عبارت $x^۲+\frac{a}{x}$، برای مقدارهای مثبت x برابر است با $۳\sqrt[۳]{\left(\frac{a}{۲}\right)^۲}$.

باتوجه به‌این مثال ومثال مربوط به‌حداقل عبارت $r^۴+s^۴+۲t^۲$، می‌توان بحث کلی زیر را ارائه داد.

وقتی که می‌خواهیم، حداقل مجموع را پیدا کنیم وحاصل‌ضرب ثابت P، دقیقاً مربوط به‌جمله‌های مجموع S نیست، به‌شرطی می‌توانیم از قضیه ۶.۲-a استفاده‌کنیم، که بتوانیم مجموع S را طوری تجدید سازمان دهیم که حاصل‌ضرب جمله‌های بازسازی‌شده، برابر P باشد. به‌همین‌ترتیب، وقتی که بخواهیم ماکزیمم حاصل‌ضرب P را پیدا کنیم ومجموع عامل‌های آن مقدار ثابتی نباشد، به‌شرطی می‌توانیم ازاین قضیه استفاده‌کنیم که بتوانیم صورت ضرب عامل‌ها را طوری تجدید سازمان دهیم‌که مجموع عامل‌های جدید، مقدار ثابتی بشود.

مثال۴. به‌ازای متغیرهای مثبت x و y، بیشترین مقدار

$xy(۷۲-۳x-۴y)$ را پیدا کنید.

حل. عامل‌های این ضرب، یعنی x، y و $۷۲-۳x-۴y$، مجموع ثابتی ندارند ولی اگر صورت ضرب را این‌طور بنویسیم:

$$\frac{۱}{۱۲}(۳x)(۴y)(۷۲-۳x-۴y) \qquad (۲)$$

و برای لحظه‌ای، ضریب $\frac{۱}{۱۲}$ را کنار بگذاریم، آن‌وقت، عامل‌های $۳x$، $۴y$ و $۷۲-۳x-۴y$، مجموع ثابتی برابر ۷۲ پیدا می‌کنند. به این ترتیب، برای این‌که حاصل‌ضرب (۲)، حداکثر مقدار ممکن باشد، باید داشته باشیم:

$$۳x=۴y=۷۲-۳x-۴y \Rightarrow x=۸،\ y=۶$$

بنابراین، حداکثر مقدار عبارت $xy(۷۲-۳x-۴y)$ برابر است با $۸\times۶\times۲۴$، یعنی ۱۱۵۲.

در بررسی حاصل‌ضرب (۲)، به‌ضریب عددی $\frac{۱}{۱۲}$ توجهی نکردیم؛ در هر موردی که حاصل‌ضرب ما، ضریب ثابتی داشته باشد، می‌توان به‌همین ترتیب، عمل کرد.

مثال ۵. برای مقدارهای مثبت x، کمترین مقدار $۵x+\frac{۱۶}{x}+۲۱$ را پیدا کنید.

حل. درست است که، دراین جا، حاصل‌ضرب سه جملهٔ این مجموع، مقداری است ثابت، ولی اگر هر سه جمله را درنظر بگیریم، دچار اشکال می‌شویم. درواقع، از برابرهای $۵x=\frac{۱۶}{x}=۲۱$ به‌جوابی برای x نمی‌رسیم.

ولی اگر مقدار ثابت ۲۱ را کنار بگذاریم، به‌سراغ حداقل مقدار $۵x+\frac{۱۶}{x}$ برویم، به جواب قابل‌قبول می‌رسیم. دو جملهٔ این مجموع، حاصل‌ضربی ثابت دارند که برابر ۸۰ است. بنابراین، حداقل این مجموع، وقتی به‌دست

می‌آیدکه داشته باشیم:

$$۵x=\frac{۱۶}{x} \Rightarrow x^۲=\frac{۱۶}{۵} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{۱۶}{۵}}$$

(چون، بنابرفرض، x عـددی مثبت است، تنها ریشهٔ مثبت را درنظر گرفته‌ایـم). به‌این‌ترتیب، حـداقل مقـدار عبارت $۲۱+\frac{۱۶}{x}+۵x$، برای مقدارهای مثبت x، برابر است با $۲۱+۸\sqrt{۵}$.

مثال ۶. ازبین‌همهٔ‌مقدارهای مثبت x و y، که‌در برابری $۳x-y=۲۰$ صدق کنند، دومقداری را بر x و y پیدا کنیدکه‌عبارت $\sqrt{x^۲+y^۲}$ را به‌حداقل خود برسانند.

[به‌تعبیر هندسی، مساله عبارت است از پیدا کردن کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبداء مختصات تا خط راست $۳x-y=۲۰$.]

حل. چون $x^۲$ و $y^۲$ غیرمنفی‌اند، بنابراین، می‌توان به‌جای $\sqrt{x^۲+y^۲}$، حداقل $x^۲+y^۲$ را به‌دست‌آورد. از رابطه $۳x-y=۲۰$ به‌دست‌می‌آید: $y=۳x-۲۰$ و بنابراین

$$x^۲+y^۲=x^۲+(۳x-۲۰)^۲=۱۰x^۲-۱۲۰x+۴۰۰=$$
$$=۱۰(x^۲-۱۲x)+۴۰۰$$

باتوجه به‌قضیهٔ ۲.۲-a، می‌دانیم، حداقل عبارت $x^۲-۱۲x$، برابر است با -۳۶، که به‌ازای $x=۶$ به‌دست می‌آید. از این‌جا معلوم می‌شود که حداقل مقدار $۱۰(x^۲-۱۲x)+۴۰۰$، یعنی $x^۲+y^۲$، برابر است با $۱۰\times-۳۶+۴۰۰$، یعنی ۴۰. به‌این‌ترتیب، حداقل مقدار $\sqrt{x^۲+y^۲}$، باشرط $۳x-y=۲۰$، برابر $\sqrt{۴۰}$ یـا $۲\sqrt{۱۰}$ است و بـه‌ازای $x=۶$ و $y=۲$ به‌دست می‌آید.

مثال ۷. حـداکثر و حداقل مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱۰۰+x^۲}-x$ را، درصورت وجود، باشرط $x\geqslant۰$ پیدا کنید.

حل. عکس تابع، باسادگی بیشتری قابل مطالعه است:

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{100+x^2}-x}=\frac{\sqrt{100+x^2}+x}{100}$$

آشکارا دیده می‌شود که، تابع $\frac{1}{f(x)}$، برای $x\geqslant 0$، تابعی صعودی است، یعنی با افزایش x، بزرگ می‌شود. درواقع، اگر $x\to\infty$، آنگاه $\frac{1}{f(x)}\to\infty$. بنابراین، $\frac{1}{f(x)}$، در نقطه $x=0$، به‌حداقل مقدار خود می‌رسد و، برای $x\geqslant 0$، ماکزیمم ندارد. از همهٔ این‌ها، نتیجه می‌شود که $f(x)$، دارای حداکثر مقدار ۱۰ است که به‌ازای $x=0$ به‌دست می‌آید؛ و باشرط $x\geqslant 0$، کمترین مقدار ندارد با این که تابع $f(x)$، برای $x\geqslant 0$، می‌نیمم ندارد، ولی ازبحث بالا روشن می‌شود که، وقتی x به‌سمت بی‌نهایت میل کند، مقدار $f(x)$ به‌سمت صفر میل می‌کند، ولی برابرصفر نمی‌شود.

روشی که درمساله‌های بالا مورد استفاده قرار گرفت، اگرچه درمیدان گسترده‌ای ازتابع‌ها کاربرد دارد، محدودیت‌هایی هم دارد. این روش را، تنها درمورد مجموع‌هایی که حاصل‌ضرب جمله‌های آن‌ها مقداری ثابت‌است و یا درمورد حاصل‌ضربی که مجموع‌عامل‌های آن مقدارثابتی باشد، می‌توان به کاربرد. این‌محدودیت، به‌خودی خود، قابل‌ملاحظه است، به‌خصوص که، حتی با برقراری این‌محدودیت هم، ممکن است، این روش، ما را ناکام کند. به‌عنوان نمونه، به‌این مساله توجه کنید: می‌خواهیم حداقل‌مقدار

$$g(x)=3x^2+3x+\frac{80}{x^3}$$

را، در مجموعهٔ عددهای مثبت x، پیدا کنیم. سه جمله‌ای که تابع $g(x)$ را تشکیل‌می‌دهند، حاصل‌ضربی ثابت، برابر۷۲۰ دارند. بنابراین، بایدمقداری از x را جست‌وجو کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$3x^2=3x=\frac{70}{x^3}$$

ولی به‌سادگی روشن می‌شودکه، این دستگاه، جواب ندارد. [خواننده‌ای که با حساب دیفرانسیل آشنا باشد، می‌تواند مساله را به‌سادگی حل کند. باحل مساله، معلوم‌می‌شودکه، حداقل مقدار $g(x)$ به‌ازای $x=۲$ به‌دست‌می‌آید و برابر است با $g(۲)=۲۷$.]

مثال دیگری می‌آوریم. دراین مثال واگرچه، استفادهٔ ازاین‌روش، ما را دچار شکست می‌کند، ولی می‌توانیم، با مختصر تغییری درآن، مقدار اکسترمم را پیدا کنیم. مساله این است: می‌خواهیم حداقل مقدار مجموع $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۴}{x}+۴x+x^۲$ را، برای $x>۰$، پیدا کنیم.

تابع‌های $x^۲$، $۴x$، $\frac{۴}{x}$ و $\frac{۱}{x^۲}$، حاصل‌ضربی ثابت برابر ۱۶ دارند. به‌همین مناسبت، قضیهٔ ۲.۶-a را به‌یاد می‌آورد. آیا دستگاه

$$x^۲=۴x=\frac{۴}{x}=\frac{۱}{x_۲}$$

جواب دارد؟ نه! کاربرد مستقیم قضیه، ما را به‌جایی نمی‌رساند. ولی ناامید نشویم. مجموع مفروض را، به‌طور جداگانه، در دوبخش $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ و $۴x+\frac{۴}{x}$ درنظر می‌گیریم وقضیه را درمورد هرکدام ازآن‌ها به‌کار می‌بریم.

حداقل مقدار $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ برابر است با ۲، و به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید؛ کمترین مقدار $۴x+\frac{۴}{x}$، یعنی $۴\left(x+\frac{۱}{x}\right)$ برابر است با ۸ و بازهم به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، نتیجه می‌گیریم که مجموع $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۴}{x}+۴x+x^۲$، به‌ازای $x=۱$ به‌حداقل مقدار خود می‌رسد و این حداقل، برابر است با $۸+۲$، یعنی ۱۰.

این مساله، درضمن، نشان می‌هدکه نابرابری واسطه‌های حسابی و

هندسی، مثل اغلب نابرابری‌های دیگر، نمی‌تواند به‌تنهائی برای حل مساله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم، درهمهٔ حالت‌ها، کارساز باشد. وقتی از نابرابری $A \geqslant G$ برای مجموع اخیر استفاده کنیم، به نابرابری

$$x^{۲}+۴x+\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^{۲}} \geqslant ۴\sqrt[۴]{۱۶}=۸ \qquad (۳)$$

می‌رسیم که، البته، برای مقدارهای مثبت x درست است؛ ولی همان‌طور که دیدیم، کمترین مقدار مجموع، برابر است با ۱۰ و نه ۸. درواقع، هیچ مقدار مثبتی برای x نمی‌توان پیدا کرد که، به‌ازای آن، نابرابری (۳)، به برابری تبدیل شود.

به‌عنوان حسن‌ختام، مساله‌ای را حل می‌کنیم تا نشان دهیم که، چگونه برخی از تبدیل‌ها، می‌توانند به‌یاری ما بیایند.

مثال ۸. حداقل مقدار تابع $f(x)=\frac{(x+۱۰)(x+۲)}{x+۱}$ را، برای مقدارهای حقیقی و مثبت x پیدا کنید.

حل. $x+۱=y$ می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$f(x)=f(y-۱)=\frac{(y+۹)(y+۱)}{y}=y+۱۰+\frac{۹}{y}$$

حداقل مقدار $y+\frac{۹}{y}$، برای $y>۰$، برابر است با ۶، که به‌ازای $y=۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین، حداقل مقدار $f(x)$، به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۱۶.

۱۲.B بیشترین مقدار xyz را، برای مقدارهای مثبت x و y و z، پیدا کنید، به‌شرطی که: I. $x+y+z=۵$؛ II. $۲x+۳y+۴z=۳۶$. [برای بخش II، از صورت ضرب $(۲x)(۳y)(۴z)$ آغاز کنید.]

۱۳.B برای عددهای مثبت و ثابت a، b، c و k، حداکثر مقدار xyz را پیدا کنید، به‌شرطی که x و y و z عددهایی مثبت باشند و داشته‌باشیم: $ax+by+cz=k$.

۱۴.B اگر x و y عددهایی حقیقی ومثبت باشند، بیشترین مقدار ممکن را برای $x^۲y$، با شرط $۶x+۵y=۴۵$، به‌دست آورید. [شرط را به‌صورت $۳x+۳x+۵y=۴۵$ بنویسید.]

۱۵.B برای عددهای حقیقی ومثبت xوy وباشرط $x>y$، حداقل مقدار $x+\frac{۸}{y(x-y)}$ را به‌دست آورید.

۱۶.B اگر a، عددی ثابت و مثبت باشد، حداکثر مقدار هریك از این عبارت‌ها را، برای $x>۰$، پیدا کنید:

$$\frac{x}{x^۲+a},\ \frac{x^۲}{x^۳+a},\ \frac{x}{x^۳+a}$$

۱۷.B ماکزیمم $x\sqrt{۱-x^۲}$ را، برای $x>۰$، پیدا کنید.

۱۸.B بیشترین‌مقدار $۲x(۱۲-x^۲)$را،برای$x>۰$، به‌دست‌آورید.

۱۹.B r و h، متغیرهایی مثبت و c، عدد ثابت مثبتی است. به شرط $r^۲h=c$، کمترین مقدار ممکن را برای $r^۲+rh$ پیدا کنید.

۲۰.B عدد مثبتی را پیدا کنیدکه تفاضل مکعب آن از خود عدد، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۲۱.B عدد مثبتی را پیدا کنیدکه تفاضل مکعب آن از مجذور آن، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۲.B اگر x وy، متغیرهای مثبتی باشند، حداقل مقدار این عبارت را پیدا کنید:

$$\frac{۵۰}{x}+\frac{۲۰}{y}+xy$$

۲۳.B برای عددهای حقیقی‌ومثبت xوyوz، کمترین مقداراین‌عبارت را پیدا کنید:

$$\frac{x}{y}+\frac{۲y}{z}+\frac{۴z}{x}+۱۲$$

۲۴۰.B برای متغیر مثبت x، کمترین مقدار عبارت $6x+\frac{24}{x^2}$ را به‌دست آورید.

۲۵۰.B برای متغیرهای مثبت x و y، حداقل عبارت $\frac{12(xy-4x-3y)}{x^2y^3}$ را پیدا کنید.

۲۶۰.B متغیرهای مثبت x و y و z، در رابطهٔ $xyz=48$ صدق می‌کنند. حداقل عبارت $xy+2xz+3yz$ را به‌دست آورید.

۲۷۰.B برای متغیرهای مثبت x و y داریم: $xy=6$، حداقل مقدار عبارت $x^2+12y+10xy^2$ را پیدا کنید.

۲۸۰.B x و y و z، متغیرهای مثبت‌اند. حاصل‌ضرب $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ را انجام دهید و نتیجه بگیرید که، حداقل‌مقدار این عبارت، برابر است با ۹. ازاین‌جا، به‌شرط $x+y+z=c$ (c، عددی ثابت است)، حداقل مقدار $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ را به‌دست آورید.

۷.۲. نابرابری واسطه‌های حسابی و توافقی. a_1، a_2، ...، a_n را n عدد مثبت‌ می‌گیریم. A واسطهٔ حسابی و G واسطهٔ هندسی این عددهاهستند:

$$A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \quad G=(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

بنا بر تعریف، واسطهٔ توافقی n عدد a_1، a_2، ...، a_n، برابراست باعکس واسطهٔ حسابی عکس‌های این عددها و با H نشان می‌دهند:

$$H=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم: $A\geqslant G\geqslant H$؛ علامت‌های برابری، تنهاوقتی که a_1،a_2،...،a_n باهم برابر باشند، برقرار است. نابرابری $A\geqslant G$ را،

قبلاً ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین، باید ثابت کنیم $G \geqslant H$.

برای اثبات، نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی را، برای عددهای a_1^{-1}، a_2^{-1}، ...، a_n^{-1} به‌کار می‌بریم:

$$\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n} \geqslant (a_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_n^{-1})^{\frac{1}{n}}$$

ولی، باتوجه به‌تعریف H و G، این نابرابری را می‌توان به‌صورت $G^{-1} \geqslant H^{-1}$ نوشت و، بنابراین، نتیجه می‌شود: $G \geqslant H$. علاوه براین، علامت برابری تنها برای $a_1^{-1}=a_2^{-1}=\ldots=a_n^{-1}$ برقرار است که با $a_1=a_2=\ldots=a_n$ هم‌ارز است.

از نابرابری‌های $A \geqslant G \geqslant H$، به‌نابرابری $A \geqslant H$ می‌رسیم که به نابرابری واسطه‌های حسابی وتوافقی مشهور است.

قضیهٔ a-۷۰۲. برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n داریم:

$$(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1})^{-1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \geqslant n^2 \quad (1)$$

وعلامت برابری، تنها برای $a_1=a_2=\ldots=a_n$ برقرار است.

اثبات این قضیه، ازنابرابری $A \geqslant H$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

که به‌سادگی و با عمل‌های سادهٔ جبری، به‌دستور (۱) تبدیل می‌شود.

مثال. اگر مجموع متغیرهای مثبت x_1،x_2،x_3وx_4 برابر ۲۰ باشد، حداقل مقدار عبارت $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$ را پیدا کنید.

حل. باتوجه به‌قضیهٔ a-۷.۲ داریم:

$$x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}+x_4^{-1} \geqslant \frac{16}{x_1+x_2+x_3+x_4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

بنابراین، حداقل مقدار عبارت مفروض برابر $\frac{4}{5}$ است وتنها وقتی به‌این

حداقل می‌رسد که داشته باشیم: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 5$.

درفصل بعدی کتاب‌هم، بارها، از نابرابری واسطه‌های حسابی و توافقی استفاده خواهیم کرد.

۲۹.B. ثابت کنید، برای عددهای حقیقی a_i (مثبت بودن آن‌ها لازم نیست)، داریم:

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \geqslant 2[a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n]$$

در داخل کروشه، در سمت راست نابرابری، $\frac{n(n-1)}{2}$ جمله وجود دارد و شامل همهٔ حاصل‌ضرب‌های به‌صورت a_ia_j است($1 \leqslant i < j \leqslant n$). درضمن، ثابت کنید، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. [نابرابری‌های از نوع $a_i^2+a_j^2 \geqslant 2a_ia_j$ را باهم جمع کنید. به خواننده توصیه می‌کنیم که اثبات را، به‌جای حالت کلی، ابتدا برای حالت خاص، ومثلاً برای $n=4$، پیدا کند.]

۳۰.B. واسطهٔ مربعی عددهای a_1، a_2، ...، a_n، بنابرتعریف، به‌عبارت زیر گفته می‌شود*:

$$R = \left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ثابت کنید $R \geqslant A$ (A، واسطهٔ حسابی این n عدد است)؛ در ضمن، علامت

---

*) یادداشت:مترجم عدد $\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ را واسطهٔ توانی عددهای a_1، a_2، ...، a_n گویند؛ که درحالت‌های خاص، C_1 و C_{-1} و C_2، به‌ترتیب، واسطه‌های حسابی، توافقی ومربعی به‌دست می‌آید:

$$C_1 = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\quad C_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1},$$

$$C_2 = \left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\right)^2$$

برابری تنها درحالت برابری هر n عدد پیش می‌آید.

۳۱.B. a_1، a_2، ...، a_n، عددهای حقیقی دلخواهند. ثابت کنید، حداقل مقدار تابع

$$f(x)=(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+\ldots+(a_n-x)^2$$

برابر است با $f(A)$، که درآن، A، واسطهٔ حسابی عددهای a_1، a_2، ...، a_n است. [یادداشت: اگر a_1، a_2، ...، a_n را به عنوان داده‌های مساله در نظر بگیریم، $\frac{f(A)}{n}$ را واریانس این داده‌ها و ریشهٔ دوم آن را انحراف معیار می‌نامند. این‌هامعیارهای پراکندگی‌این داده‌ها هستند، زیرامثلاً $(a_1-A)^2$، مربع انحراف a_1 از واسطهٔ A است. به‌زبان مساله، انحراف معیار برابر است با جذر واسطهٔ مربع‌های انحراف هریك ازکمیت‌ها، نسبت به‌واسطهٔ حسابی A.]

۳۲.B. به‌عدد میانی در مجموعه‌ای از عددها، وقتی‌که مرتب شده باشند، میانهٔ این مجموعهٔعددها گفته می‌شود؛ درحالتی‌که عدد میانی‌وجود نداشته باشد، میانهٔ مجموعهٔ این‌عددها، برابر است باواسطهٔ حسابی دو عدد میانی. مثلاً، میانه عددهای $\{۱،۳،۵،۷،۹\}$ برابر است با ۵، درحالی‌که میانهٔ عددهای $\{۱،۳،۵،۷،۹،۱۱\}$ برابر است با ۶.

پنج عدد مثبت پیدا کنیدکه، میانهٔ آن‌ها، از واسطهٔ مربعی آن‌ها، بیشترباشد. همچنین، مجموعه‌ای ازپنج عدد مثبت پیدا کنیدکه، میانهٔآن‌ها، کوچکتر از واسطهٔ توافقی آن‌ها باشد.

۸.۲. عدد e. عدد e، ثابت اساسی ریاضیات است و درمقایسهٔ باعدد π، بسیار مهم‌تر است. عدد e، کاربردهای زیادی دارد؛ مثلا به‌عنوان مبنای لگاریتم در دستگاه لگاریتمی‌به‌نام لگاریتم‌طبیعی، یا به‌عنوان پایه‌درتابع‌های نمائی (e^x). دراین‌جا، کاری به‌کاربردهای فراوان عدد e نداریم وتنها، با استفاده از نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، به تعریف و تعیین مقدار آن می‌پردازیم.

برای هر عدد درست و مثبت n، تعریف می‌کنیم:

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \text{و} \quad g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (1)$$

بنابراین به‌عنوان مثال داریم: $f(1)=2$ ، $f(2)=\frac{9}{4}$ ، $f(3)=\frac{64}{27}$ و $g(1)=4$ ، $g(2)=\frac{27}{8}$ و $g(3)=\frac{256}{81}$. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$f(1)<f(2)<f(3)<\ldots<f(n)<f(n+1)<\ldots \qquad (2)$$

برای اثبات نابرابرهای (۲)، نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی را برای $(n+1)$ عدد زیر می‌نویسیم:

$$1,\ 1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ldots,\ 1+\frac{1}{n}$$

مجموع این $(n+1)$ عدد برابر است با $n+2$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $f(n)$ است، بنابراین

$$\frac{n+2}{n+1}>[f(n)]^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}>f(n)$$

و این، همان نابرابری $f(n+1)>f(n)$ است.

درمرحلهٔ دوم، ثابت می‌کنیم:

$$g(1)>g(2)>g(3)>\ldots>g(n-1)>g(n)>\ldots \qquad (3)$$

این بار، از نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، برای $(n+1)$ عدد زیر استفاده می‌کنیم:

$$1,\ 1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1-\frac{1}{n}$$

که مجموع آن‌ها برابر n و حاصل ضربشان برابر $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ است. بنابراین

$$\frac{n}{n+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

که می‌توان آن‌را، این‌طور نوشت:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

و این، همان نابرابری $g(n)<g(n-1)$ است.

اکنون ثابت می‌کنیم، هرعدد از دنبالهٔ صعودی (۲)، کوچکتر است از هرعدد در دنبالهٔ (۳)، یعنی برای هرعدد درست ومثبت m و k داریم:

$$f(m)<g(k) \qquad (۴)$$

اثبات این نابرابری، خود، سه‌مرحله دارد:

۳۳.B. ثابت‌کنید، برای هرعدد درست ومثبت n: $f(n)<g(n)$.

این مساله، درستی نابرابری (۴) را برای $m=k$ ثابت می‌کند. درحالت $m<k$، می‌توان نوشت $f(m)<f(k)$ و $f(k)<g(k)$؛ که نابرابری‌اولی‌نتیجه‌ای‌از (۲) ونابرابری دوم‌نتیجه‌ای از ۳۳.B است. حالت $m>k$ موضوع مسالهٔ بعدی است.

۳۴.B. نابرابری (۴) را برای حالت $m>k$ ثابت‌کنید.

حالت خاصی از (۴)، به‌ازای $k=1$، به‌صورت نابرابری $f(m)<g(1)$ درمی‌آید وچون $g(1)=4$، بنابراین، برای هرعددطبیعی n:

$$f(m)<4 \qquad (۵)$$

دنبالهٔ نتیجه‌گیری ازاین زنجیرهٔ بحث را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۳۵.B. ثابت‌کنید: $g(n)-f(n)=\frac{f(n)}{n}$، به‌نحوی‌که $g(n)-f(n)<\frac{4}{n}$.

اگرچه، برای هرعدد درست ومثبت n، مقدار $g(n)-f(n)$، عددی

مثبت است، ولی می‌بینیم که، اگر n را به‌قدر کافی بزرگ بگیریم، می‌توانیم این تفاضل را به‌قدر کافی کوچك کنیم، زیرا با بزرگ شدن n، مقدار $\frac{۴}{n}$ کاهش می‌یابد.

به‌این‌ترتیب، در دنبالهٔ صعودی (۲)، هرکدام ازجمله‌ها، کوچکتر است ازهرکدام ازجمله‌های دنبالهٔ نزولی(۳)؛ ولی جمله‌های nام دودنباله، برای مقدارهای بزرگ n، به‌هم نزدیك‌اند و این، به‌روشنی، از نابرابری ۳۵.B دیده می‌شود. ازهمین‌جا، به‌صورتی شهودی، احساس می‌کنیم که: باید عدد منحصری وجود داشته‌باشدکه از هرجملهٔ دنبالهٔ (۲) بزرگتر و از هرجملهٔ دنبالهٔ (۳) کوچکتر باشد. [بحث کلی و دقیق دراین مورد، به‌تجزیه وتحلیل عددهای حقیقی مربوط می‌شودکه خارج ازموضوع این‌کتاب‌است.]

این عدد را با نماد e نشان می‌دهند؛ e تنها عددی است که، برای هر عدد طبیعی n، در نابرابرهای زیر صدق می‌کند:

$$f(n)<e<g(n) \quad \text{یا} \quad \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<e<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$$

اگر $n=۱۰^۴$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f(۱۰^۴)=۲/۷۱۸۱، \quad g(۱۰^۴)=۲/۷۱۸۴$$

و این نشان‌می‌دهدکه عدد e، تا سه‌رقم دهدهی، برابر است با $e=۲/۷۱۸$ عدد e، با ۷ رقم دهدهی برابر $e=۲/۷۱۸۲۸۱۸$ می‌شود. عدد e هم، مثل‌عدد π، گنگ‌است و، بنابراین، دارای‌تعدادی‌نامتناهی رقم دهدهی‌است.

برای این‌که بتوان رقم‌های دهدهی عدد e را بهتر به‌یادآورد، این جملهٔ انگلیسی را درست‌کرده‌اند:

He	studied	a	treatise	on	calculus
۲/	۷	۱	۸	۲	۸

برای به‌خاطر سپردن رقم‌های عدد π هم، شیوه‌های مشابهی وجود دارد، مثل این یکی در زبان اسپانیائی

Sol y Luna y Mundo Proclaman al Eterno Autor del Cosmos
۳/ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹ ۲ ۶ ۵ ۳ ۶

البته، باید آخرین رقم، ۵ باشد نه ۶. ولی چون رقم‌های بعداز ۵، برابر۸۹۷ است ($\pi=$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۸۹۷...)، رقم نهم بعدازممیز به ۶ نزدیک‌تر است تا به ۵.*

۹.۲. نابرابری کوشی. نابرابری‌های دیگری هم هستند که می‌توان، از آن‌ها، برای جست وجوی ماکزیمم و می‌نیمم استفاده کرد؛ ولی هیچ کدام از آن‌ها، به‌اندازهٔ نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، مهم نیستند. باوجود این، دراین‌جا به‌نابرابری کوشی می‌پردازیم که، به‌خاطر کاربردهای خود، اهمیت زیادی دارد.

برای عددهای حقیقی a_1، a_2،...، a_n و b_1، b_2،..، b_n، نابرابری زیر برقرار است:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \qquad (1)$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که a_iها با b_iها متناسب باشند، یعنی

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n} \qquad (2)$$

ابتدا نابرابری‌کوشی را برای $n=3$ ثابت می کنیم، داریم:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2 \qquad (3)$$

کافی است‌عمل‌های جبری را انجام‌دهیم، تامعلوم شود که درواقع، دوطرف

---

*) در این مورد، می‌توانید در کتاب «سرگرمی‌های هندسه»، صفحه‌های ۲۶۱ و ۲۶۲ (ترجمهٔ فارسی)، عبارت‌های بسیار جالبی در زبان‌های مختلف، و منجمله زبان‌فارسی، برای بیان عدد π پیدا کنید.م.

تساوی باهم برابرند. سمت راست برابری (۳)، مجموع سه‌مربع کامل است و، بنابراین، مقداری مثبت یا صفر است. به‌این‌ترتیب، نابرابری (۱) درحالت $n=3$ ثابت می‌شود درضمن، برابری

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a_1b_2=a_2b_1$، $a_1b_3=a_3b_1$ و $a_2b_3=a_3b_2$، یعنی

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

درحالت کلی، اتحاد (۳) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2+$$
$$+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2$$

تعداد مربع‌های کامل درسمت راست این‌برابری، برابر $\frac{n(n-1)}{n}$ است. تعداد مربع‌ها، دراین‌جا، برابر است باتعداد روش‌های ممکن انتخاب دو اندیس متمایز، از بین اندیس‌های ۱، ۲، ...، n. به‌این‌ترتیب، نابرابری (۱)، درحالت کلی ثابت می‌شود [برای حالت تساوی دوطرف، دشواری زیادی وجود ندارد].

مثال ۱. حداقل و حداکثر عبارت $2x+3y+6z$ را پیدا کنید، به‌شرطی‌که برای x و y و z داشته باشیم: $x^2+y^2+z^2=1$ (این، معادلهٔ کره‌ای است به‌شعاع واحد ومرکز مبداء مختصات).

حل. درنابرابری کوشی، به‌ازای $n=3$، اگر به‌جای a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 به‌ترتیب مقدارهای ۲، ۳، ۶ و x، y، z را قرار دهیم، به‌دست‌می‌آید:

$$(2^2+3^2+6^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(2x+3y+6z)^2 \qquad (4)$$

وبرابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶} \qquad (۵)$$

برای کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$، نابرابری (۴)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۴۹\geqslant(۲x+۳y+۶z)^۲ \qquad (۶)$$

و این نابرابری، به‌معنای آن است که مقدارهای عبارت $۲x+۳y+۶z$ بین -۷ و $+۷$ قرار دارد؛ و همین دوعدد، می‌نیمم وماکزیمم این‌عبارت هستند. درواقع، نقطه‌هایی در روی سطح کره وجود دارندکه باشرط (۵) سازگارند. برای پیدا کردن این نقطه‌ها، باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۱،\quad \frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}$$

که درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{۲}{۷}،\ y=\frac{۳}{۷}،\ z=\frac{۶}{۷}\ \text{و}\ x=-\frac{۲}{۷}،\ y=-\frac{۳}{۷}،\ z=-\frac{۶}{۷}$$

ومقدار $۲x+۳y+۶y$،روی‌سطح کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$، دراین‌نقطه‌ها، به‌حداکثر مقدار خود (۷) وحداقل مقدار خود (-۷) می‌رسد.

مثال۲. A،B،CوD عددهایی‌ثابت ودست‌کم یکی‌ازاین‌سه‌مقدارثابت A،BوC مخالف صفر است. اگر داشته باشیم: $Ax+By+Cz=D$، حداقل‌مقدار $a^۲x^۲+b^۲y^۲+c^۲z^۲$ را، برایaوbوc مخالف‌صفر، پیدا کنید.

یادداشتی‌دربارهٔ مساله. درحالت‌خاص $a=b=c=۱$،مسالهٔمفروض به‌معنای پیدا کردن‌کوتاه‌ترین فاصلهٔ از مبداء مختصات تاصفحهٔ $Ax+By+Cz=D$ است. این‌شرط‌که، دست‌کم، یکی ازثابت‌های AوB و C برابر صفر نباشد، لازم است، زیرا درغیراین‌صورت، مساله به‌صورتی مبتذل درمی‌آید؛ ولی شرط صفر نبودن هیچ‌کدام ازثابت‌های a وb وc لازم نیست. راه‌حلی را که در این‌جا می‌آوریم، برای سایر حالت‌ها هم می‌توان استفاده کرد.

حل. اگرنابرابری‌کوشی‌را، برای $n=۳$، درنظر بگیریم و،به‌ترتیب،

a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 را برابر ax، by، cz و $\frac{A}{a}$ ، $\frac{B}{b}$ ، $\frac{C}{c}$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}+\frac{C^2}{c^2}\right)\geqslant(ax+by+cz)^2$$

سمت راست نابرابری، برابر مقدار ثابت D^2 است و بنابراین

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\geqslant D^2\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}+\frac{C^2}{c^2}\right)^{-1} \qquad (7)$$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که ax و by و cz با $\frac{A}{a}$ و $\frac{B}{b}$ و $\frac{C}{c}$ متناسب باشند. اگر این نسبت‌های مساوی را، همراه با معادلهٔ $Ax+By+Cz=D$ در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$x=\frac{b^2c^2AD}{k}\,,\quad y=\frac{a^2c^2BD}{k}\,,\quad z=\frac{a^2b^2CD}{k}$$

که‌درآن: $k=A^2b^2c^2+B^2a^2c^2+C^2a^2b^2$. به‌این‌ترتیب، ثابت‌می‌شود که نابرابری (۷)، می‌تواند به‌برابری تبدیل شود؛ یعنی حداقل مقدار $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ در صفحهٔ $Ax+By+Cz=D$، برابر است با $D^2\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}+\frac{C^2}{c^2}\right)^{-1}$.

[نابرابری (۱) را باید به‌نام «نابرابری کوشی ـ شوارتز» خواند، زیرا شوارتز، تعمیم آن‌را در حساب دیفرانسیل و انتگرال داده است. بونیاکووسکی (Buniakowski)، ریاضی‌دان روسی هم، بدون اطلاع از کار دیگران، نابرابری (۱) را به‌دست آورد. به‌همین مناسبت، گاهی، این نابرابری را، «نابرابری بونیاکووسکی» می‌نامند.]

مساله‌های گوناگون

B.۳۶. در دنبالهٔ نامتناهی زیر، بزرگترین عدد را پیدا کنید:

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ldots,\sqrt[n]{n},\ldots$$

۳۷.B اگر x متغیری حقیقی باشد، حداقل مقدار هر یک ازاین عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$x^2+6x+1 \quad \text{و} \quad x^4+6x^2+1$$

۳۸.B بیشترین مقدار عبارت $54x^2y^3(1-x-y)$ را، برای متغیرهای مثبت x و y پیدا کنید.

۳۹.B برای مقدارهای مثبت x می‌دانیم: $x^2+1 \geqslant 2x$. آیا نابرابری $x^3+1 \geqslant 2x$ هم، برای مقدارهای مثبت x برقرار است؟ حداکثر مقدار ثابت k را طوری پیدا کنید که، برای $x>0$، داشته باشیم: $x^3+1 \geqslant kx$.

۴۰.B ثابت کنید، برای همهٔ مقدارهای مثبت aوbو c داریم:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{c^6}{6} \geqslant abc$$

باچه شرطهایی، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود؟

۴۱.B اگر، برای عددهای مثبت a،b،cو d داشته باشیم:

$$a+b=c+d \quad \text{و} \quad a^2+b^2>c^2+d^2$$

ثابت کنید: $a^3+b^3>c^3+d^3$.

۴۲.B برای متغیرحقیقی x، حداقل وحداکثراین‌عبارت را پیدا کنید:

$$\sqrt{x^2+4x+85}-\sqrt{x^2+4x+40}$$

۴۳.B $S(n)$ را به معنای مجموع رقم‌های عدد طبیعی n می گیریم. معادله $n=kS(n)$، برای هر n، جوابی برای k دارد؛ مثلاً برای $n=18$ داریم: $k=2$؛ برای $n=27$: $k=3$ و برای $n=12$: $k=4$. کمترین مقدار عدد طبیعی k را پیدا کنیدکه، به‌ازای آن، معادلهٔ $n=kS(n)$ برای هیچ کدام ازعددهای طبیعی n برقرار نباشد.

۴۴.B a،b و c عددهایی‌حقیقی و $a>0$ است. x را طوری پیداکنید

که $ax^۲+bx+c$ می‌نیمم باشد. [راهنمایی: توجه کنیم که $x^۲-kx$، تنها وقتی به‌حداقل خود می‌رسد که داشته باشیم: $x=\frac{k}{۲}$ (k، عددی است مثبت، منفی یا صفر).]

B·۴۵· چند جمله‌ای درجه دوم

$$f(x, y)=ax^۲+۲bxy+cy^۲+dx+ey+k$$

را درنظر بگیرید که، درآن، ضریب‌ها؛ ثابت وحقیقی‌اند و $a>۰$ و $c>۰$. در حالت $b=۰$ می‌توانیم می‌نیمم $f(x, y)$ را، به‌سادگی با می‌نیمم کردن $ax^۲+dx$ و $cy^۲+ey$، به‌طور جداگانه، به‌دست‌آوریم. درحالت $b\neq۰$، با فرض $x=X-\frac{b}{a}y$، به‌چندجمله‌ای درجهٔ دوم $f(X-\frac{b}{a}y, y)$ می‌رسیم که‌فاقدجملهٔ Xy است. همچنین، می‌توان تحقیق کرد که ضریب‌های $X^۲$ و $y^۲$ در چند جمله‌ای درجهٔ دوم اخیر، مثبت‌اند، به‌شرطی که $a>۰$ و $ac>b^۲$ باشند. بنابراین، درحالت برقراری این شرطها، $f(x, y)$، در حوزهٔ عددهای حقیقی، دارای می‌نیمم منحصر به‌فرداست. با استفاده ازاین توضیح‌ها، حداقل مقدار عبارت

$$۴x^۲+۱۶xy+۲۵y^۲-۲۴x-۳۰y+۶۰$$

را، برای مقدارهای حقیقی x و y، پیدا کنید.

B·۴۶· $abc\neq۰$ و $f(x, y)$ را چند جمله‌ای درجهٔ دوم مسالهٔ قبل می‌گیریم مطلوب‌است، شرطهای لازم وکافی، برای این که $f(x, y)$ دارای می‌نیمم باشد؛ یعنی بتوان مقدارهای خاص $x=x_۰$ و $y=y_۰$ را طوری پیدا کرد که، برای‌هر x و yحقیقی، داشته باشیم: $f(x_۰, y_۰)\leqslant f(x, y)$.

یادداشتی برفصل دوم. کاراصلی‌این‌فصل، نشان‌دادن‌قدرت‌جبرمقدماتی درحل‌مسأله‌های‌ریاضی بود. جان‌دالبرت (jeand' Albert)، ریاضی‌دان فرانسوی نوشت: «جبر، بلندنظر و گشاده‌دست است، و اغلب، بیش‌ازآن‌چه از او خواسته شده است، به‌ما می‌دهد». هستهٔ مرکزی این‌فصل را، نابرابری

مربوط به‌واسطه‌های حسابی‌وهندسی، تشکیل می‌دهد. درفصل‌های بعدی‌هم، ازکاربردهای این نـابرابری صحبت خواهیم‌کـرد. اثبات نـابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی‌وهندسه، به‌آن‌چه دراین‌فصل آوردیم، منحصرنمی‌شود و هرروز به‌اثبات تازه‌ای ازآن، درادبیات ریاضی، برخورد می‌کنیم.

روش‌های جبری را می‌توان درمسالة‌های هندسی به‌کاربرد [فصل بعد را ببینید] و برعکس، نتیجه‌های جبری را می‌توان بـا استدلال‌های هندسی به‌دست‌آورد [به‌عنوان‌نمونه، مسالهٔ D.۳۶ را درپایان فصل‌چهارم‌ببینید]؛ ازمثلثات هم می‌توان استفاده‌کرد [مثلاً ۵.۵ را ببینید].

فصل سوم

مساله‌های مقدماتی هندسه

۱.۳. ورود به‌مطلب. نابـرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، درحل مساله‌های هندسی هم، کاربردهای زیادی دارد که، شاید برجسته‌ترین آن‌ها، مساله‌های هم‌پیرامونی باشند. به‌شکل‌هایی هم‌پیرامون گویند که دارای محیطی برابر باشند وممتازترین مساله در مـورد شکل‌های هم‌پیرامون، پیدا کردن شکلی است که دارای مساحت حداکثر باشد. مثلاً ، درمیان همهٔ مثلث‌های هم‌پیرامون، حداکثرمساحت، متعلق به کدام مثلث است؟ این مساله ومسألهٔ مشابه آن دربارهٔ چهارضلعی‌ها را در دوبند بعدی، موردبحث قرار داده‌ایم. تعمیم این مساله‌ها، درموردچندضلعی‌ها ومنحنی‌های واقع درصفحه، به‌فصل بعد موکـول شده است. البته، همهٔ نتیجه‌گیری‌هـای این فصل، بـه‌مسألهٔ هم‌پیرامونی‌مربوط نمی‌شوند، همان‌طور که، همهٔ‌استدلال‌ها برمبنای نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی قرار نگرفته‌اند. دربند ۵.۳، اثبات‌ها رابراساس تقارن قرار داده‌ایم. مشخص‌ترین مساله، دراین نـوع، مسالهٔ هرون است: پیدا کردن نقطه‌ای مانند P واقع برخط راست d، به‌نحوی که مسیر از نقطهٔ A به‌نقطهٔ B، وقتی از طـریق P انجام می‌گیرد، حداقل مقدار ممکن باشد (A و B، دریك طرف خط‌راست d قرار دارند). حـل این مساله، درشکل ۵.۳-a داده شده است: از برخـورد $A'B$ با خط راست d نقطهٔ P به‌دست می‌آید (که درآن، A' قرینهٔ A نسبت به‌خط راست d است).

وقتی‌که در یك صفحه، یك شکل وخط راست d وجود داشته باشند، می‌توان قرینهٔ این‌شکل را نسبت به‌خـط راست d پیدا کرد؛ هرشکل همراه باقرینهٔ خودش نسبت به‌خط راست d، روی هم، یك شکل متقارن راتشکیل می‌دهند که خط راست d، محور تقارن آن است. به‌همین مناسبت، این گونه تقارن را، تقارن محوری گویند. به‌همین تـرتیب، می‌توان قرینهٔ شکل‌های

فضایی را نسبت به‌یک‌صفحه به‌دست آورد. دست‌کش دست راست، قرینهٔ دست‌کش دست‌چپ است این مفهوم‌های ساده، دربند ۵.۳ وهم در جاهای دیگر این کتاب، مورد استفاده قرارگرفته‌اند.

۲.۳. مثلث‌ها. از قضیه‌ای آشنا، درمورد مثلث‌ها، آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۳-a. از بین مثلث‌های با محیط مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای حداکثر مساحت است.

این قضیه را می‌توان، با استفاده از روش‌های جبری فصل اول، به‌سادگی ثابت‌کرد. ضلع‌های مثلث را x، y و z می‌گیریم. بنابرفرض، محیط آن $x+y+z$ و، بنابراین، نصف محیط آن $s=\frac{x+y+z}{۲}$، مقداری ثابت است. می‌خواهیم ماکزیمم مساحت یا ماکزیمم مجذور مساحت آن

$$A^{۲}=s(s-x)(s-y)(s-z) \qquad (۱)$$

را پیدا کنیم. عامل ثابت s را می‌توان کنار گذاشت و به‌جست‌وجوی ماکزیمم عبارت $(s-x)(s-y)(s-z)$ رفت. عامل‌های این‌ضرب، مجموع ثابتی دارند:

$$(s-x)+(s-y)+(s-z)=۳s-(x+y+z)=s$$

بنابراین، طبق قضیهٔ ۳.۲-b، حاصل‌ضرب وقتی به‌ماکزیمم خود می‌رسد که، این عامل‌ها، با هم برابر باشند:

$$s-x=s-y=s-z \Rightarrow x=y=z$$

یعنی، مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

دراین اثبات، لازم بودکه عامل ثابت s را کنار بگذاریم، زیرا اگر در رابطهٔ (۱)، هر چهار عامل تشکیل‌دهندهٔ $A^{۲}$ را درنظر می‌گرفتیم، بازهم مجموعی ثابت داشتند:

$$s+(s-x)+(s-y)+(s-z)=۴s-(x+y+z)=۲s$$

ولی، هرکوششی برای ماکزیمم‌کردن عبارت $A^{۲}$، با برابرکردن این‌چهار

عامل، به‌نتیجه نمی‌رسید؛ زیرا دستگاه

$$s=s-x=s-y=s-z$$

تنها جواب $x=y=z=0$ را قبول می‌کند.

این قضیه، باقضیه زیر هم‌ارز است: ازبین مثلث‌های هم‌ارز [= با مساحت‌های برابر]، مثلث متساوی‌الاضلاع، کمترین محیط را دارد.

اغلب‌مساله‌های هم‌پیرامونی، مثل مسالهٔ بالا را، به‌دوگونه‌می‌توان تنظیم کرد که، از نظر منطقی هم‌ارز یکدیگرند: حداکثر مساحت برای محیط ثابت یا حداقل محیط برای مساحت ثابت. این موضوع جالب را، دربند ۶.۳ مورد بررسی قرار خواهیم داد.

قضیه‌۲.۳ـb. از بین مثلث‌های به قاعده ومحیط معلوم، مثلث متساوی‌الساقین با همان قاعده، دارای مساحت ماکزیمم است.

مثلاً، ازبین همهٔ مثلث‌هایی‌که قاعده‌ای برابر ۱۶ ومحیطی برابر۳۶ دارند، مثلثی دارای حداکثر مساحت است‌که به‌ضلع‌های ۱۶ و ۱۰ و ۱۰ باشد، که دراین‌صورت، مساحت آن‌برابر ۴۸ است. اثبات این قضیه،درهمان حال وهوای قضیهٔ ۲.۳ـa انجام می‌گیرد. اگر طول قاعده را برابر b و طول‌های دوضلع دیگر را، به‌ترتیب، برابر x و y فرض‌کنیم، محیط مثلث و بنابراین نصف محیط مثلث، یعنی $s=\frac{b+x+y}{2}$، مقداری ثابت است.

برای ماکزیمم‌کردن مساحت

$$A^2=s(s-b)(s-x)(s-y)$$

دومقدار ثابت s و $s-b$ را کنار می‌گذاریم وماکزیمم $(s-x)(s-y)$ را جست‌وجومی‌کنیم. مجموع دوعامل این ضرب، مقداری است ثابت،زیرا

$$(s-x)+(s-y)=2s-(x+y)=(b+x+y)-(x+y)=b$$

بنابراین، ماکزیمم حاصل‌ضرب این دو عامل، وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$s-x=s-y \Rightarrow x=y$$

قضیه را با روشی جبری ثابت کردیم، ولی هر خواننده‌ای که با تعریف بیضی و برخی ویژگی‌های ساده آن آشنا باشد، می‌تواند آن را با روشی هندسی ثابت کند. راس‌های مثلث را P، Q و R و QR را همان قاعدهٔ معلوم b می‌گیریم. بنابراین، دو نقطهٔ Q و R ثابت‌اند. ببینیم، نقطهٔ P، درچه موقعیتی است؟ (برای سادگی کار، وضع P را، تنها در یك طرف خط راست QR در نظر می‌گیریم). می‌دانیم: $PQ+PR=۲s-b$. بنابراین، نقطهٔ P روی یك بیضی با کانون‌های Q و R قرار دارد. مساحت مثلث PQR برابر است با حاصل‌ضرب قاعده درنصف ارتفاع. چون قاعده، طول ثابتی دارد، مساحت وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که ارتفاع مثلث حداکثر مقدار ممکن باشد؛ و این، تنها وقتی پیش می‌آید که نقطهٔ P دریکی از دو انتهای قطر کوچکتر بیضی واقع باشد، یعنی $PQ=PR$.

قضیهٔ ۲.۳ــc. از بین همهٔ مثلث‌های با دو ضلع ثابت وضلع سوم متغیر، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلع متغیر وتر آن باشد، حداکثر مساحت راخواهد داشت. یعنی، اگرطول‌های دوضلع مفروض را a و b بگیریم، مثلث با مساحت ماکزیمم، به‌ضلع‌های a،b و $\sqrt{a^۲+b^۲}$ خواهد بود؛ این مساحت ماکزیمم برابر است با $\frac{۱}{۲}ab$.

اثبات. زاویهٔ بین دو ضلع a و b را θ می‌گیریم. چون θ زاویه‌ای متغیراست، می‌توان صورت‌مساله را، به‌این‌ترتیب، تنظیم کرد: θ را طوری پیدا کنید که مساحت مثلث، ماکزیمم باشد. مساحت مثلث، برابر است با $\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$، بنابراین، باید $\sin\theta$ حداکثر مقدار ممکن باشد. بیشترین مقدار $\sin\theta$ برابر است با ۱، که تنها برای $\theta=۹۰^\circ$ ممکن است.

C۱۰. اگر L را محیط و A را مساحت مثلث بگیریم، ثابت کنید، در هر مثلث، نابرابری $A\leqslant\frac{\sqrt{۳}L^۲}{۳۶}$ برقرار است که، درآن، علامت برابری،

برای مثلث متساوی‌الاضلاع است.

C.۲. از بین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ به‌وتر معلوم، کدام مثلث، مساحت ماکزیمم دارد؟ کدام مثلث، محیط ماکزیمم دارد؟

C.۳. مثلث ABC و نقطهٔ متغیر P، درصفحهٔ مثلث، داده شده‌اند. ثابت کنید، حداقل‌مقدار $PA^۲+PB^۲+PC^۲$، وقتی به‌دست می‌آید که P، بر مرکز هندسی مثلث منطبق باشد. [دستگاه محورهای قائم مختصات را درنظر بگیرید. $(a_۱ ، a_۲)$، $(b_۱ ، b_۲)$ و $(c_۱ ، c_۲)$ را راس‌های مثلث و $(x ، y)$ را نقطهٔ P، فرض کنید. مختصات مرکز هندسی مثلث $\left(\frac{a_۱+b_۱+c_۱}{۳}, \frac{a_۲+b_۲+c_۲}{۳}\right)$ خواهد بود.]

C.۴. در مثلث PQR، زاویهٔ راس P معلوم است و می‌دانیم: $PQ+PR=c$ (c، مقداری ثابت‌است). ثابت کنید درمثلثی که داشته باشیم: $PQ=PR$: I. مساحت‌مثلث، ماکزیمم‌است؛ II. طول QR می‌نیمم‌است.

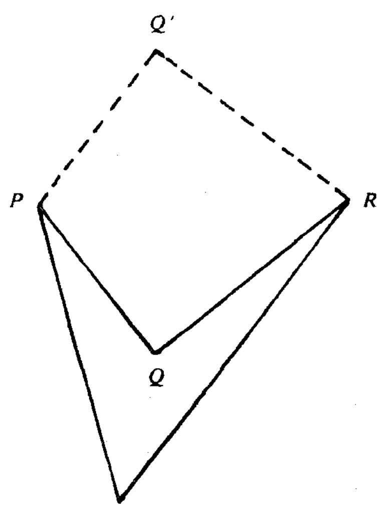
۳.۳. چهارضلعی‌ها. مسالهٔ زیر، در تمام‌کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، با توضیح کامل، آمده است: از بین همهٔ مستطیل‌های با محیط ثابت، کدام یك بیشترین مساحت را دارد؟ ولی، این مساله را هم، می‌توان با همان روش‌های جبری فصل قبل، حل‌کرد. محیط ثابت را $۲c$ و یکی از ضلع‌های مستطیل را x می‌گیریم؛ ضلع دیگر مستطیل، برابر $c-x$ می‌شود. بنابراین، مساحت مستطیل برابر $x(c-x)$ یا $cx-x^۲$ است. و مادرفصل قبل دیدیم که، حداکثر مقدار $cx-x^۲$ برابر است با $\frac{c^۲}{۴}$، که به‌ازای $x=\frac{c}{۲}$ به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، ضلع دیگر مستطیل هم برابر $\frac{c}{۲}$ و مستطیل به‌مربع تبدیل می‌شود: از بین مستطیل‌های با محیط ثابت، حداکثرمساحت، متعلق به‌مربع است.

طبیعی‌است که، این‌قضیه را تعمیم‌دهیم و به‌فکرقضیهٔ کلی‌تر زیر بیفتیم:

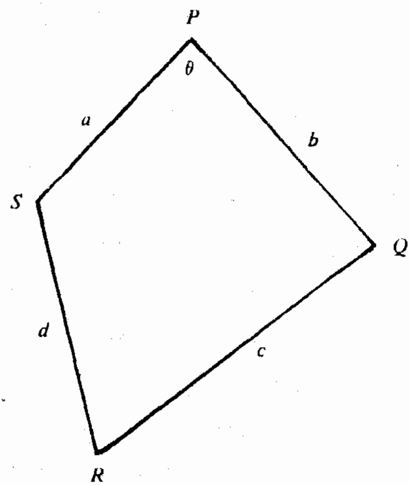
قضیهٔ۳.۳-a. ازبین همهٔ چهارضلعی‌های بامحیط معلوم، مربع دارای مساحت ماکزیمم است.

کافی است به‌چهارضلعی‌های محدب بپردازیم، زیرا همیشه می‌توان به‌جای یك چهارضلعی مقعر، چهارضلعی محدبی درنظر گرفت که دارای‌همان ضلع‌ها ولی مساحت بیشتر باشد. این مطلب درشکل ۳.۳-a نشان داده است: درچهارضلعی مقعر $PQRS$، راس Q در داخل مثلثی قرارگرفته که از سه راس دیگر تشکیل شده است. Q' را قرینهٔ Q نسبت به‌خط راست PR می‌گیریم، یعنی PR عمودمنصف پاره‌خط QQ' است. دراین‌صورت، چهارضلعی محدب $PQ'RS$، ضلع‌هایی برابر ضلع‌های چهارضلعی مقعر $PQRS$ دارد، ولی مساحت آن ازمساحت چهارضلعی مقعر بیشتر است.

اکنون، چهار ضلعی محدب $PQRS$ را، به‌ترتیب، با ضلع‌های a، b، c و d درنظرمی گیریم (شکل۳.۳-b). اگرمربعی درنظر بگیریم که محیط‌آن‌با محیط این‌چهارضلعی برابر باشد، هرضلع‌مربع برابر $\frac{a+b+c+d}{۴}$ ومساحت



شکل ۳.۳-a



شکل۳۰۳-b

آن برابر $\frac{(a+b+c+d)^{۲}}{۱۶}$ مـی‌شود. مساحت چهارضلعی $PQRS$ را با A نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم:

$$A\leqslant\frac{(a+b+c+d)^{۲}}{۱۶} \qquad (۱)$$

که علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که چهارضلعی $PQRS$، یك مربع باشد.

زاویهٔ راس P، یعنی‌زاویهٔ بین دوضلع a و b را θ می گیریم. مساحت مثلث PQS، برابر است با $\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ و وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد که $\sin\theta=۱$، یعنی $\theta=\frac{\pi}{۲}$ باشد؛ که دراین‌صورت، مساحت مثلث PQS برابر $\frac{۱}{۲}ab$ می‌شود. به‌همین‌ترتیب، حداکثرمساحت مثلث QRS برابر $\frac{۱}{۲}cd$ است. بنابراین

$$A\leqslant \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd \qquad (۲)$$

وعلامت برابری، تنها وقتی بـرقرار است که دو زاویـهٔ راس‌های P و R، زاویه‌هایی قائمه باشند. اگر ازهمین روش استدلالی، برای دومثلث PSR و PQR استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A\leqslant \frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}bc \qquad (۳)$$

اکنون، اگر دوبرابر نابـرابری‌هـای (۲) و (۳) را باهـم جمع کنیم، بعداز مختصری عمل، نتیجه می‌شود:

$$4A\leqslant (a+c)(b+d)$$

که درآن، علامت‌برابری، تنها وقتی برقرار است که چهار زاویهٔ چهارضلعی قائمه باشند، یعنی چهار ضلعی $PQRS$ به‌یك مستطیل تبدیل شود. [دستور $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$، همان دستورقدیمی مصری‌هاست که برای محاسبهٔ‌مساحت چهارضلعی به‌کار می‌بردند.]

می‌دانیم (قضیهٔ ۲.۲-b): $xy\leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$، و برابری تنـها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $x=y$. اگر $x=a+c$ و $y=b+d$ بگیریم به‌دست می‌آید:

$$4A\leqslant (a+c)(b+d)\leqslant \frac{(a+c+b+d)^2}{4} \qquad (۴)$$

که ازآن، به‌همان نابرابری (۱) می‌رسیم. از زنجیرهٔ نابرابری‌ها تانابرابری (۴)، معلوم می‌شودکه، عـلامت برابری، تنها وقتی بـرقرار است که اولاً چهارضلعی $PQRS$ مستطیل باشد، ثانیاً داشته باشیم: $a+c=b+d$. و این دوشرط، به‌معنای مربع بودن چهارضلعی $PQRS$ است. به‌این‌ترتیب، اثبات قضیه، کامل می‌شود.

قضیهٔ ۳.۳-b. چهارضلعی محاطی، از هر چهار ضلعی دیگری که همان ضلع‌ها را به‌همان ردیف داشته باشد، مساحت بیشتری دارد.

اگر طول ضلع‌های چهارضلعی را، به‌ترتیب، a،b،cوd؛ مساحت آن را A؛ نصف محیط چهارضلعی را s و دو زاویهٔ روبه‌رو در آن را θ و λ بگیریم، داریم [بند ۳.۱ را ببینید]:

$$A^{۲}=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{۱}{۲}abcd[۱+\cos(\theta+\lambda)] \quad (۵)$$

کمترین مقدارممکن، برای $۱+\cos(\theta+\lambda)$، صفر است وموقعی پیش‌می‌آید که داشته باشیم: $\theta+\lambda=۱۸۰^{\circ}$، یعنی وقتی که چهارضلعی مفروض، قابل محاط در دایره باشد. درچنین حالتی است که مساحت چهارضلعی، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد. قضیه ثابت شد.

دستور (۵)، راه دیگری را، برای اثبات قضیهٔ ۳.۳-a نشان می‌دهد. برای اثبات این قضیه، کافی است چهارضلعی‌هایی را درنظر بگیریم که قابل محاط در دایره‌اند. دراین‌صورت، باتوجه به‌دستور (۵)، مساحت چنین چهارضلعی‌هایی، برابر است با

$$A^{۲}=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \quad (۶)$$

اگر محیط را برابر مقدار ثابت $۲s$ بگیریم، در رابطهٔ (۶) باصورت ضرب چهار عامل متغیر (ومثبت) سروکار داریم که مجموعی ثابت دارند:

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)+(s-d)=۲s$$

و بنابراین (باتوجه به‌قضیهٔ ۶.۲-a): حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم‌است که داشته باشیم:

$$s-a=s-b=s-c=s-d \Rightarrow a=b=c=d$$

درضمن، تنها چهارضلعی قابل محاط در دایره، با ضلع‌های برابر،عبارت‌است از مربع.

یادداشت. برای اثبات قضیه، می‌توانستیم از این‌جا آغاز کنیم که،

برای هرچهارضلعی Q، چهارضلعی Q' وجود داردکه ضلع‌هایی برابر ضلع‌های چهارضلعی Q داشته و، درضمن، قابل محاط در دایره باشد، به‌این‌نتیجه، به‌طور شهودی هم می‌توان رسید. چهارضلعی $BCDE$ را درنظر بگیرید و فرض کنیدکه، مثلاً، مجموع دو زاویهٔ روبه‌روی B و D در آن از ۱۸۰ درجه کمتر باشد (و بنابراین، مجموع دو زاویهٔ روبه‌روی C و E از ۱۸۰ درجه بیشتر). بازهم فرض می‌کنیم، چهارضلعی در راس‌های خود لولاداشته باشد. اکنون اگر دو راس B و D را ازبیرون به‌طرف داخل چهارضلعی فشاردهیم، زاویه‌های B و D بزرگتر (و درنتیجه، زاویه‌های C و E کوچکتر) می‌شوند. به‌جایی می‌رسدکه مجموع دو زاویه B و D برابر ۱۸۰ درجه شودکه، دراین‌صورت، به‌چهارضلعی محاطی باهمان ضلع‌ها می‌رسیم.

C۵۰. چهارضلعی Q_1 با مساحت ماکزیمم با ضلع‌های، به‌ترتیب، به‌طول‌های ۸، ۹، ۱۲ و ۱۹ و، همچنین، چهارضلعی Q به‌مساحت‌ماکزیمم با ضلع‌های، به‌ترتیب، به‌طول‌های ۸، ۹، ۱۹ و ۱۲ مفروض‌اند. مساحت مشترك را پیدا کنید. هریك از چهارضلعی‌ها، دریك دایره محاط‌اند. دایرهٔ محیطی کدام چهارضلعی بزرگتر است؟

C۶۰. ازبین چهارضلعی‌های به‌محیط و یك‌ضلع ثابت، کدام یك‌مساحت ماکزیمم دارد؟

C۷۰. ازبین‌چهارضلعی‌های‌به‌ضلع‌های ۱، ۴، ۷ و ۸، کدام‌یك بیشترین مساحت را دارد؟ این مساحت را محاسبه کنید.

C۸۰. کشاورزی ۶۰۰ فوت نرده برای به‌حصار درآوردن یك زمین مستطیل شکل دارد. یك‌طرف زمین، به‌خط مستقیم، وصل به‌رودخانه است ونیازی به‌حصارکشی ندارد وتنها برای سه‌ضلع مستطیل، باید از نرده‌ها استفاده کرد. ضلع‌های مستطیل را چگونه باید انتخاب‌کرد تا مساحت‌آن حداکثر مقدار ممکن باشد؟

C۹۰. درمسالهٔ‌قبل، فرض‌کنید‌ه ۶۰۰ فوت نرده، برای به‌حصاردرآوردن سه‌ضلع یك چهارضلعی درنظر گرفته شده باشد. ضلع مجاور رودخانه، نیازی به نرده‌کشی ندارد. شکل چهار ضلعی وضلع‌های آن چگونه باشد تا حداکثر

مساحت را داشته باشد؟ به‌زبان دیگر، از بین چهارضلعی‌هایی که، یك ضلع آن‌ها به‌طول دلخواه ومجموع سه‌ضلع دیگرآن برابر ۶۰۰ (یا هرعدد مثبت دیگر) باشد، کدام چهارضلعی، مساحت ماکزیمم دارد؟

C.۱۰. ثابت کنید، از بین چهارضلعی‌های مقعر بامحیط ثابت c، چهارضلعی بامساحت‌ماکزیمم‌وجود ندارد. ثابت کنید، مساحت‌هریك‌ازاین چهارضلعی‌ها، از $\frac{c^۲\sqrt{۳}}{۳۶}$ کوچکتر است وچهارضلعی‌های مقعری وجود دارند‌که، مساحت آن‌ها، به‌هراندازه‌ای که بخواهیم، به‌این مقدار نزدیك می‌شوند.

C.۱۱. $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ را طول ضلع‌ها و $p_۱$ و $p_۲$ را طول دو قطر یك چهارضلعی فرض می‌کنیم. ثابت کنید:

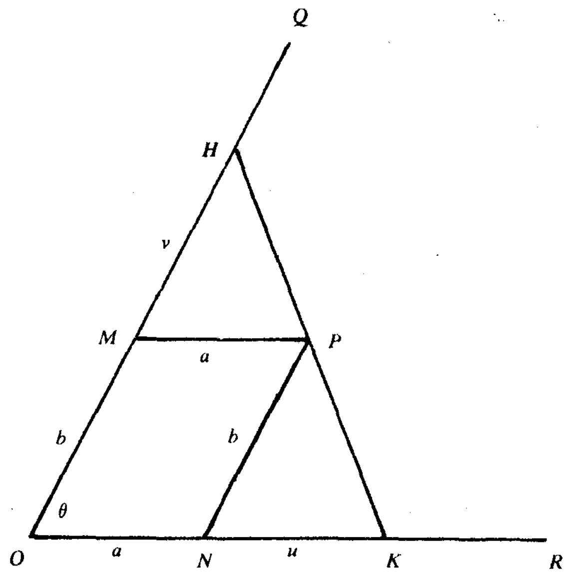
$$a_۱+a_۲+a_۳+a_۴<۲p_۱+۲p_۲<۲(a_۱+a_۲+a_۳+a_۴)$$

C.۱۲. درمسالهٔ قبلی فرض‌کنید: $a_۱\leqslant a_۲\leqslant a_۳\leqslant a_۴$ (لزومی‌ندارد $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$، ضلع‌های متوالی چهار ضلعی باشند) و$p_۱\leqslant p_۲$. ۸ نابرابری $p_i>a_j$ $(i=۱،۲$ و $j=۱،۲،۳،۴)$ و ۶ نابرابری $p_۱+p_۲>a_r+a_s$ $(۱\leqslant r<s\leqslant ۴)$ را درنظر بگیرید. کدام یك ازاین نابرابری‌ها، برای همهٔ چهارضلعی‌های محدب، برقرار است؟ کدام یك، برای برخی از چهارضلعی‌ها، برقرار است؟

۴.۳. نتیجه‌هایی درهندسه. درهندسه، مساله‌های زیادی وجود دارند که می‌توان آن‌ها را، باتوجه به‌نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی، حل کرد. تا این‌جا، با برخی ازاین مساله‌ها آشنا شدیم و، اکنون، بحث خود را، روی مساله‌های گوناگونی ازهندسه، ادامه می‌دهیم.

مسالهٔ۱. نقطهٔ P را در درون زاویهٔ QOR در نظر می‌گیریم (شکل ۴.۳-a). می‌خواهیم نقطهٔ H را بر OQ ونقطهٔ K را بر OR طوری پیدا کنیم که هرسه نقطهٔ H و P و K روی یك خط راست باشند و، درضمن، مساحت مثلث HOK، حداقل مقدار ممکن شود.

یك راه برخورد با این مساله، این است که خط راست HPK را



شکل ۴۰۳- a

رسم کنیم و به‌دنبال شرط یا شرطهایی برای نقطه‌های H و K باشیم که، به‌ازای آن‌ها، مساحت‌مثلث HOK حداقل مقدار ممکن شود. پاره‌خطهای راست PM و PN را، به‌ترتیب، موازی OR و OQ رسم می‌کنیم (M روی OQ و N روی OR است). طول پاره‌خطهای ON، NK، OM، MH را، به‌ترتیب، با a، u، b و v نشان می‌دهیم. بنابراین: $MP=a$ و $NP=b$. اگر زاویهٔ QOR را θ بنامیم، مساحت مثلث HOK برابر $\frac{1}{2}(a+u)(b+v)\sin\theta$ می‌شود. θ مقدار معلومی است، بنابراین مساله، منجر به‌پیداکردن حداقل مقدار $(a+u)(b+v)$ می‌شود که، در آن، a و b، مقدارهایی ثابت‌اند. u و v متغیرند و مقدار آن‌ها، بستگی به‌جای نقطه‌های H و K، روی ضلع‌های زاویه، دارند. دو متغیر u و v به‌هم مربوط‌اند، زیرا ازتشابه دو مثلث HMP و PNK (که ضلع‌هایی متناسب دارند)،

نتیجه می‌شود: $\frac{v}{a}=\frac{b}{u}$ یا $v=\frac{ab}{u}$. اگر این مقدار v را در عبارت $(a+u)(b+v)$ قرار دهیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که: باید عبارت

$$(a+u)(b+v)=(a+u)\left(b+\frac{ab}{u}\right)=۲ab+b\left(u+\frac{a^۲}{u}\right)$$

را به‌حداقل برسانیم. مقدار ثابت $۲ab$ وضریب ثابت b را کنار می‌گذاریم. باید کمترین مقدار $u+\frac{a^۲}{u}$ را پیدا کنیم. جمله‌های این مجموع، حاصل‌ضرب ثابتی دارند، بنابراین، حداقل آن به‌ازای $u=\frac{a^۲}{u}$، یعنی $u=a$ به‌دست می‌آید. ازآن‌جا برای $v=\frac{ab}{u}$ به‌دست می‌آید: $v=b$. به‌این‌ترتیب، موقعیت منحصربه‌فردی برای هریك از نقطه‌های H و K پیدا می‌شود، زیرا $OK=۲a$ و $OH=۲b$.

به‌ترتیب دیگری هم می‌توان مساله را حل کرد. H و K را باید طوری انتخاب کنیم که، نقطهٔ P، وسط پاره‌خط HK باشد. دلیل این‌مطلب آن است که، دو مثلث HMP و PNK، نه‌تنها متشابه، بلکه در ضمن قابل‌انطباق‌اند؛ درحالت $u=a$ و $v=b$ داریم: $HP=PK$.

این مساله، بابی است برای یك مسالهٔ دیگر:

مسالهٔ ۲. نقطهٔ P در داخل زاویهٔ قائمه QOR داده شده است. می‌خواهیم نقطهٔ H را بر OQ ونقطهٔ K را بر OR طوری پیدا کنیم که H، P و K روی یك خط راست باشند و درضمن، طول پاره‌خط راست HK، حداقل مقدار ممکن شود.

محدودیت قائمه بودن زاویه لازم است، زیرا، درغیراین‌صورت، نمی‌توانیم مساله را مورد بررسی قرار دهیم. شکل ۴.۳-a می‌تواند برای توضیح مساله درنظرگرفته‌شود، به‌شرطی که زاویهٔ QOR را قائمه به‌حساب آوریم. [این مساله، اغلب به‌این‌صورت مطرح می‌شود: حداکثر طول

نردبانی را پیدا کنید که بتوان آن را از کریدور به‌عرض b وارد کریدور به‌عرض a کرد؛ دو کریدور باهم زاویهٔ قائمه تشکیل داده‌اند. (شکل ۴.۳-b را ببینید).]

مسالهٔ حداقل‌کردن طول KH، به‌معنای آن است که مجموع $KP+PH$ یعنی

$$(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+(a^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{یا} \quad (b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}+\left(a^2+\frac{a^2b^2}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

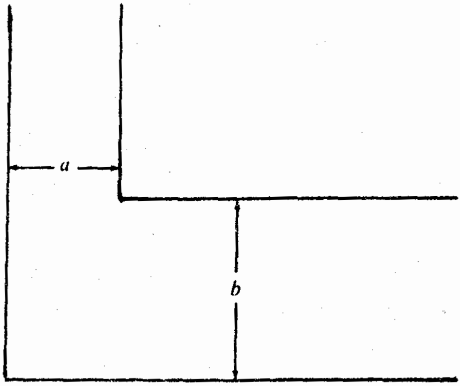
را به‌حداقل برسانیم. با اندك تبدیلی، این عبارت را می‌توان چنین نوشت:

$$(b^2+u^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{u}\right)$$

به‌جای این عبارت می‌توان مجذور آن را درنظر گرفت (حداقل یك عبارت مثبت، همراه با حداقل مجذور آن پیش می‌آید)؛ این مجذور را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$(a^2+b^2)+\left[u^2+\frac{ab}{u}+\frac{ab}{u}\right]+\left[au+au+\frac{a^2b^2}{u^2}\right]$$

این عبارت را، به‌طور قراردادی، به‌صورت $(a^2+b^2)+f(u)+g(u)$



شکل ۴.۳- b

می‌نویسیم. با اندکی دقت معلوم می‌شود که $f(u)$ و $g(u)$، به‌ازای $u^3=ab^2$، یعنی $u=\sqrt[3]{ab^2}$ به‌حداقل مقدار خود می‌رسند؛ درضمن، به‌دست می‌آید: $v=\dfrac{ab}{u}=\sqrt[3]{a^2b}$ و با پیداشدن u و v مساله حل می‌شود.

نحوهٔ دیگری ازمسالهٔ ۱ و ۲، این مساله است که نقطه‌های H بر OQ و K بر OR را طوری پیدا کنیم که H و P و K روی یك‌خط راست‌باشند و، درضمن، محیط مثلث HOK می‌نیمم باشد. این مساله را، دربند ۷.۳، حل خواهیم کرد.

شکل‌دیگری ازاین‌مساله، پیدا کردن جای H و K برضلع‌های زاویهٔ ROQ است، به‌نحوی که حاصل‌ضرب $PH.PK$ می‌نیمم باشد و این، همان مسالهٔ ۴۰.C است که درپایان‌بخش آمده است.

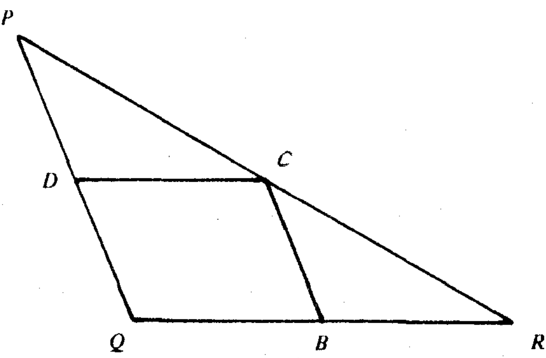
مسالهٔ کلاسیك دیگری که وجود دارد، پیدا کردن مستطیلی محاط در یك مثلث است که حداکثر مساحت را داشته باشد. حل این مساله، چندان دشوار نیست و ما در این‌جا، مسالهٔ کلی‌تری را مطرح می‌کنیم:

مسالهٔ ۳. ثابت‌کنید در هر مثلث مفروض می‌توان متوازی‌الاضلاعی محاط کرد که مساحت آن، برابر نصف مساحت مثلث باشد. وثابت‌کنید که متوازی‌الاضلاعی با مساحت بیشتر، نمی‌توان درمثلث محاط کرد.

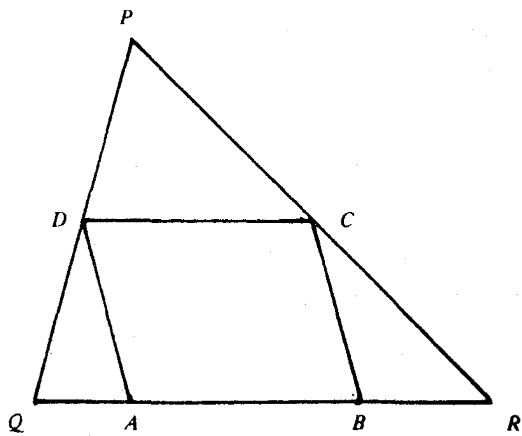
مساله‌را برای متوازی‌الاضلاع‌هایی حل می‌کنیم که‌چهار راس هر کدام ازآن‌ها، بر ضلع‌های‌مثلث واقع باشند. برای‌حالت‌های دیگر، یادداشت‌هایی درپایان راه‌حل آورده‌ایم.

مثلث PQR و متوازی‌الاضلاع محاط درآن را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که راس‌های متوازی‌الاضلاع برضلع‌های مثلث واقع باشند. روشن است که، یکی از ضلع‌ها ومثلاً PQ، شامل دو راس از متوازی‌الاضلاع است (شکل‌های ۴.۳-c و ۴.۳-d). درشکل ۴.۳-c با متوازی‌الاضلاع $QBCD$ و در شکل ۴.۳-d با متوازی‌الاضلاع $ABCD$ سروکار داریم.

درهردوحالت، مثلث‌های PDC و PQR متشابه‌اند نسبت تشابه را r می‌گیریم، مثلاً



شکل ۴.۳ - c



شکل ۴.۳ - d

$$r = \frac{PD}{PQ} = \frac{DC}{QR}$$

اگر b طول قاعدهٔ QR و h طول ارتفاع مثلث PQR باشد، آن‌وقت $DC = rb$ و، درضمن، ارتفاع مثلث PDC برابر rh می‌شود. ارتفاع متوازی‌الاضلاع، برابراست با $h - rh$ و، بنابراین‌مساحت متوازی‌الاضلاع چنین می‌شود:

$$rb(h-rh)=bh(r-r^2)$$

باتوجه بەقضیهٔ ۲.۲-a، ماکزیمم $r-r^2$ برابر است با $\frac{1}{4}$ که بەازای $r=\frac{1}{2}$ بەدست می‌آید. بنابراین، بزرگترین متوازی‌الاضلاع، مساحتی برابر $\frac{1}{4}bh$ داردکه برابر نصف مساحت مثلث PQR است.

بەسادگی می‌توان ثابت کردکه همیشه می‌توان چنین متوازی‌الاضلاعی را درمثلث محاط کرد. کافی است D و C را، بەترتیب، وسط ضلع‌های PQ و PR، شبیه شکل‌های ۴.۳-c و ۴.۳-d بگیریم. اگر از DوC دو عمود بر QR فرود آوریم، مستطیل محاط در مثلث بەدست می‌آیدکه مساحتی برابر نصف مساحت مثلث دارد. درمثلثی که سەزاویهٔ حاده داشته باشد، سه مستطیل ازاین‌گونه می‌توان رسم کرد؛ درمثلث با یك زاویهٔ منفرجه، تنها یك مستطیل محاطی با مساحتی برابر نصف مساحت مثلث وجود دارد و در مثلث قائم‌الزاویه، دو مستطیل.

مساحت متوازی‌الاضلاعی که هرچهار راس آن بر ضلع‌های مثلث‌واقع نباشند، بەطور وضوح، ازنصف مساحت مثلث کمتر می‌شود برای اثبات، باید ابتدا، متوازی‌الاضلاعی را درنظر گرفت کەدرست سەراس آن‌برضلع‌های مثلث واقع باشند، بعد، متوازی‌الاضلاعی که درست دو راس آن، سپس متوازی‌الاضلاعی که درست یك راس آن و، سرانجام، متوازی‌الاضلاعی که هیچ‌کدام از راس‌های آن، برضلع‌های مثلث واقع نباشند. باتوجه بەآن‌چه گفته شد، می‌توان این پرسش‌ها را طرح کرد.

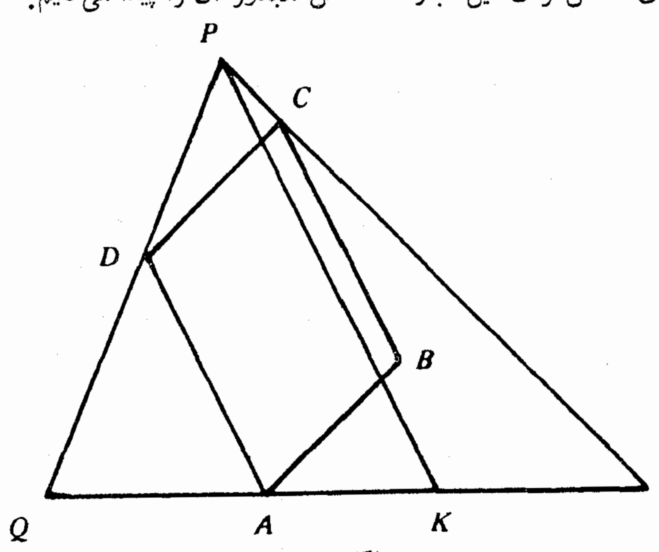
آیا ممکن است، متوازی‌الاضلاع محاطی را، بزرگتر از آن‌چه گفته شد، درنظر گرفت؟ آیا می‌توان مثلث را فشرده‌تر کرد، بەنحوی که مثلث کوچکتری شامل این متوازی‌الاضلاع باشد؟ آیا می‌توان ازیك راس‌مثلث، پاره‌خطی‌موازی یکی‌ازضلع‌های متوازی‌الاضلاع‌رسم کرد تا متوازی‌الاضلاع ومثلث را بەدو بخش‌جداگانه‌تقسیم کند؟ درهمهٔ این‌حالت‌ها، سرآخربەهمان

صورت نخستین مساله می‌رسیم. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ محاط در مثلث PQR را درنظر بگیرید (شکل ۴.۳-e)؛ پاره‌خط PK را موازی DA رسم کنید؛ مثلث PQR به‌دومثلث PKQ و PKR تقسیم می‌شود؛ هریك ازاین مثلث‌ها بر یك متوازی‌الاضلاع محیط است. در متوازی‌الاضلاع PKQ، هر چهار راس روی ضلع‌های مثلث‌اند، درمثلث PKR، پاره‌خط KB را رسم کنید و ادامه دهید تا CR را قطع کند (مثلاً، درنقطهٔ T)؛ آن‌وقت، در مثلث TKP، متوازی‌الاضلاعی محاط شده است که چهار راس آن، روی ضلع‌های مثلث‌است... واجازه بدهیددنبالهٔ بحث را به‌عهدهٔ خواننده‌بگذاریم.

مسالهٔ۴. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $(c,\circ)$ را ازنمودار تابع $y^{۲}=۴x$ پیدا کنید. c، عددی‌است حقیقی‌ومی‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. (x,y) را نقطه‌ای دلخواه ازنمودار منحنی $y^{۲}=۴x$ می‌گیریم؛ فاصلهٔ نقطهٔ $(c,\circ)$ تانقطهٔ (x,y)، که باید می‌نیمم شود، برابر است با

$$\sqrt{(x-c)^{۲}+(y-\circ)^{۲}}=\sqrt{(x-c)^{۲}+۴x} \qquad (۱)$$

به‌جای حداقل‌کردن این عبارت، حداقل مجذور آن را پیدا می‌کنیم:



شکل ۴.۳ - e

$$(x-c)^{۲}+۴x=x^{۲}+(۴-۲c)x+c^{۲} \qquad (۲)$$

مقدارثابت $c^{۲}$ را کنارمی‌گذاریم و به‌جست‌وجوی حداقل $x^{۲}+(۴-۲c)x$ می‌رویم. بنابرقضیهٔ ۲.۲-a، این‌حداقل به‌ازای $x=c-۲$ به‌دست‌می‌آید.

باید مراقب باشیم که جبر، ما را فریب ندهد. $(x،y)$ نقطه‌ای از نمودار $y^{۲}=۴x$ است، یعنی x باید مقداری غیرمنفی باشد، بنابراین، جواب $x=c-۲$، وقتی قابل‌قبول است که داشته باشیم $c\geqslant ۲$، و دراین‌صورت، حداقل عبارت (۱) برابر $۲\sqrt{c-۱}$ می‌شود.

اگر $c<۲$، آن‌گاه‌جواب $x=c-۲$ قابل‌قبول نیست. دراین‌حالت، باید دوباره به‌سراغ‌عبارت $x^{۲}+(۴-۲c)x$ برویم و می‌نیمم‌آن‌را، از بین مقدارهای مثبت و صفر x جست وجو کنیم. چون، دراین‌حالت، $۴-۲c$ و x، مقدارهایی غیرمنفی‌اند، روشن است که $x^{۲}+(۴-۲c)x$ غیرمنفی‌است و، بنابراین، کمترین مقدار آن برابر صفر است که به‌ازای $x=۰$ ظاهر می‌شود. به این‌ترتیب، کمترین مقدار (۱)، برای $c<۲$، به‌ازای $x=۰$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\sqrt{(-c)^{۲}}=|c|$؛ که برای $c>۰$ برابر c و برای $c<۰$ برابر $-c$ است.

جواب‌ها را، به‌زبان هندسی، به‌این‌ترتیب می‌توان بیان کرد: برای حالت $c\leqslant ۲$، نقطهٔ $(۰،۰)$، نزدیک‌ترین نقطه از نمودار $y^{۲}=۴x$ به‌نقطهٔ $(c،۰)$ است؛ درحالت $c>۲$، نزدیک‌ترین نقطه ازنمودار $y^{۲}=۴x$ به‌نقطهٔ $(c،۰)$، نقطهٔ $(c-۲،\pm ۲\sqrt{c-۲})$ است.

C.۱۳. دایرهٔ به‌مرکز C و دونقطهٔ P و Q واقع برمحیط آن، مفروض‌اند، باچه شرطی مساحت مثلث CPQ حداکثر مقدار ممکن است؟

C.۱۴. ثابت کنید، ازبین همهٔ مکعب مستطیل‌های به‌حجم ثابت، مکعب، کمترین مقدار سطح را دارد.

C.۱۵. جعبهٔ مکعب‌مستطیل شکل دربازی باحجم ثابت Kموردنیاز است. بعدهای این مکعب‌مستطیل را طوری پیدا کنیدکه، مواد لازم برای ساختن کف و وجه‌های جانبی آن، حداقل مقدار ممکن باشد.

C.۱۶۰ می‌خواهیم درمنطقه‌ای‌سردسیر، انباری باهوای گرم، به‌شکل مکعب مستطیل و باحجم ۷۵۰۰۰ فوت مکعب بسازیم. اگر میزان اتلاف حرارت درهرمترمربع کف آن، به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۵}$ اتلاف حرارت در دیوارهای اطراف‌وسقف‌باشد، انبار را باچه‌بعدهایی بسازیم، تا اتلاف حرارت‌به‌حداقل مقدار ممکن برسد؟

C.۱۷۰ جعبه‌ای به‌شکل مکعب مستطیل درناحیهٔ اول دستگاه مختصات فضایی قرار دارد. یك راس این‌مکعب مستطیل در مبداء مختصات و راس قطری روبه‌روی آن، برصفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ واقع است (a، b و c، ثابت‌های مثبت‌اند). حداکثر حجم جعبه چقدر می‌تواند باشد؟درواقع، باید حداکثرمقدار xyz را بامحدودیت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ پیدا کرد. [ناحیهٔ اول، در دستگاه مختصات فضایی، به‌ناحیه‌ای ازفضا گفته می‌شود که، در آن، (x,y,z) هرنقطهٔ، مقدارهایی غیرمنفی باشند.]

C.۱۸۰ بعدهای یك‌جعبه به‌حجم ماکزیمم را طوری پیدا کنیدکه در بیضوی (الیپسوئید) $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ محاط باشد. هریك از یال‌های جعبه را، بایکی از محورهای مختصات، موازی می‌گیریم. [درواقع، باید ماکزیمم xyz را با شرط $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{c^۲}{z^۲}=۱$ پیدا کرد.]

C.۱۹۰ مستطیل با مساحت ماکزیمم را طوری پیدا کنیدکه قابل محاط در نیم‌دایرهٔ مفروضی باشد (یك ضلع مستطیل، روی قطر نیم‌دایره است). [مساله را با روش تحلیلی حل‌کنید، یعنی معادلهٔ نیم‌دایره را، در دستگاه قائم مختصات $x^۲+y^۲=r^۲$ $(y\geqslant ۰)$ بگیرید.]

C.۲۰۰ از یك ورقهٔ آهنی مربع شکل، به ضلع ۳۰، برای ساختن یك جعبهٔ‌مکعب مستطیل شکل‌بدون‌سرپوش،استفاده شده است. برای‌این‌منظور، باید از هرگوشهٔ ورقه، مربعی را جدا کنیم تا با تا کردن بعدهای حاصل،

جعبهٔ لازم به‌دست آید. ضلع مربع‌های گوشه‌ای، چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن شود؟

۲۱.C. ثابت کنید، از بین همهٔ استوانه‌های قائم دوار به‌حجم ثابت، استوانه‌ای دارای حداقل سطح کل است که، درآن، داشته باشیم: $h=2r$ (h ارتفاع و r شعاع قاعدهٔ استوانه است). [به‌استوانه‌ای، قائم دوار گویند که قاعدهٔ آن برمحور استوانه عمود، ومقطع آن یك دایره باشد.]

۲۲.C. استوانهٔ قائم‌دواری باحجم‌ثابت را درنظر می گیریم که‌سرپوش نداشته باشد (استوانه، ازطرف بالا باز است). اگر بخواهیم سطح این استوانه (مجموع مساحت قاعده پائین و سطح جانبی) حداقل مقدار ممکن باشد، بین r و h چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۲۳.C. بستگی بین r و h (شعاع قاعده و ارتفاع) را در استوانهٔ‌قائم دواری پیدا کنید که درکرهٔ مفروض محاط شده باشد و حجمی حداکثر داشته باشد.

۲۴.C. اگر قاعده و ارتفاع مقطع عرضی یك دیرك را، به‌ترتیب، b و h بگیریم، استحکام آن متناسب با bh^2 است. می‌خواهیم ازکندهٔ درختی بامقطع دایره‌ای به‌قطر ۱۲ اینچ، دیرکی با مقطع مستطیلی بتراشیم. بعدهای مقطع مقاوم‌ترین دیرك را پیدا کنید. [دیرك با $b=2$ و $h=4$، مقاوم‌تر از دیرك با $b=4$ و $h=2$ است. مساله، منجر به‌پیدا کردن ماکزیمم bh^2 باشرط $b^2+h^2=144$ می‌شود.]

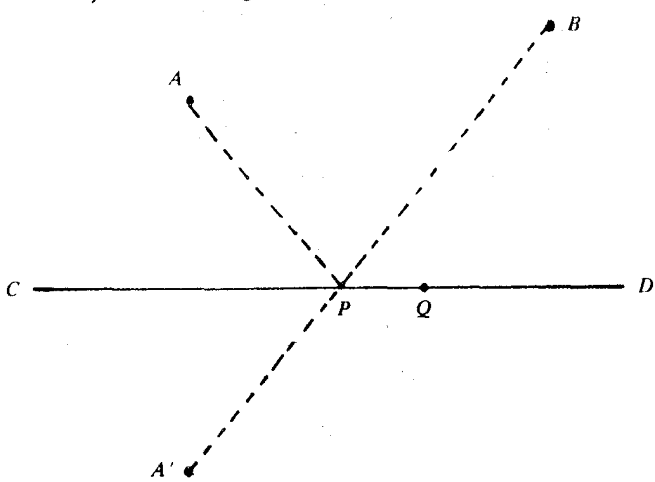
۲۵.C. نقطه یا نقطه‌هایی از نمودار تابع $y=x^2$ را پیدا کنید که‌تا نقطهٔ $(0,c)$ کمترین فاصله را داشته باشند (c، عددی است حقیقی: مثبت، منفی یا صفر).

۲۶.C. A، B و C را روی محورهای مختصات، دریك دستگاه مختصات فضایی، طوری انتخاب کرده‌ایم که مجموع طول‌های یال‌های چهاروجهی $OABC$، مقداری‌ثابت‌باشد (O، مبداء مختصات است)، موقعیت این نقطه‌ها چگونه باشد تا حجم چهار وجهی، حداکثر مقدار ممکن شود؟ [طول‌های OA، OB و OC را، به‌ترتیب x، y و z بگیرید؛ در نتیجه،

طول‌هـای AB، AC و BC، بـه‌ترتیب، برابر $\sqrt{x^2+y^2}$، $\sqrt{x^2+z^2}$ و $\sqrt{y^2+z^2}$ می‌شوند. حجم چهار وجهی، از دستور $\frac{1}{3}hb$ به‌دست می‌آیدکه، درآن، b مساحت قاعده و h ارتفاع چهاروجهی است و در این مساله، برابر $\frac{1}{6}xyz$ می‌شود، زیرا اگـر مثلث OAB را به‌عنوان قـاعده درنظر بگیریم، خواهیم داشت: $b=\frac{1}{2}xy$ و $h=z$.]

۵.۳. نظام تقارن. این مسالـه را درنظر بگیرید: دونقطهٔ A و B در یك‌طرف خط راست CD داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند P برخـط راست CD طوری پیدا کنیدکه $PA+PB$، حداقل‌مقدار ممکن باشد.

بهترین وساده‌ترین راه‌حل مساله، با پیداکردن قرینهٔ یکی از دو نقطهٔ A و B، نسبت به‌خط راست CD بـه‌دست می‌آید. مثلاً، اگر A' را قرینهٔ A نسبت به‌CD فرض کنیم (شکل‌۵.۳-a)، آن‌وقت پاسخ مساله، ازبرخورد خط‌راست BA' با خـط راست CD به‌دست می‌آید. نقطهٔ P (نقطهٔ برخورد



شکل ۵.۳ - a

CD و BA')، همان نقطهٔ مطلوب است. این مساله را، قضیهٔ هرون هم می‌نامند.

مفهوم قرینهٔ یك نقطه، نسبت به‌خط راست، روشن است: A' قرینهٔ A نسبت به‌خط راست CD است، وقتی‌که CD، عمودمنصف پاره خط راست AA' باشد. اکنون ثابت می‌کنیم، P، همان نقطهٔ موردنظر است. نقطهٔ دلخواه‌دیگری‌مثل Q را روی‌خط‌راست CD درنظرمی‌گیریم (شکل ۳.۵-a).
داریم: $AQ=A'Q$ و $AP=A'P$. بنابراین

$$AQ+BQ=A'Q+BQ>A'B=A'P+PB=AP+PB$$

یعنی، مجموع فاصله‌های A و B از هرنقطهٔ دیگر مثل Q واقع بر CD، از مجموع فاصله‌های AوB تا P، بیشتر است.

همین نتیجه را، با روش جبری هم می‌توانیم تنظیم‌کنیم. CD را منطبق بر محور xها و C را مبداء مختصات می‌گیریم. (a,b) و (c,d) را، مختصات دونقطهٔ A و B، باشرط $b>0$ و $d>0$ فرض می‌کنیم. باید x را طوری پیدا کنیم‌که مجموع فاصله‌های نقطهٔ $(x,0)$ از دونقطهٔ (a,b) و (c,d)، حداقل مقدار ممکن باشد. مجموع این دوفاصله، چنین است:

$$\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2} \qquad (1)$$

مختصات نقطهٔ A'، قرینهٔ A نسبت به‌خط راست CD، به‌صورت $(a,-b)$ درمی‌آید؛ بنابراین، برای معادلهٔ خط راست $A'B$ داریم:

$$\frac{y+b}{-b-d}=\frac{x-a}{a-c}$$

و برای پیداکردن مختصات نقطهٔ P، باید دراین معادله، $y=0$ قرار داد (تا نقطهٔ برخورد BA' با CD به‌دست آید):

$$x=\frac{ad+bc}{b+d} \qquad (2)$$

و این، مقدار منحصر به‌فردی برای x است‌که حداقل مقدار عبارت (۱) را

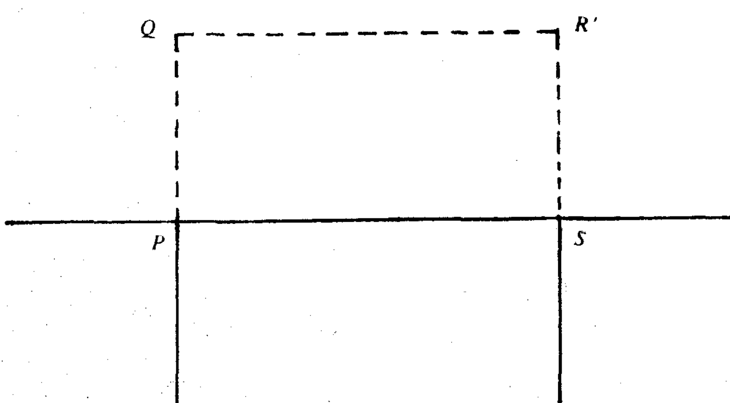
به‌دست می‌دهد.

برای نمونهٔ دیگری از کاربرد نظام تقارن، مساله C.۸ را به‌صورت خالص هندسی، می‌آوریم.

از بین مستطیل‌هایی که طول یکی از ضلع‌های آن متغیر، و مجموع سه‌ضلع دیگر آن برابرمقدار ثابت c است، کدام یك بیشترین مساحت رادارد؟

$PQRS$ را، مستطیل جواب می گیریم (شکل۵.۳-b) که، درآن‌ضلع PS متغیر و مجموع $PQ+QR+RS$، برابر مقدار ثابت c است. قرینهٔ مستطیل‌را، نسبت به‌خط راست PS پیدا می کنیم، مستطیل $PQ'R'S$ به‌دست می‌آید. طول‌متغیر PS را کنارمی گذاریم؛ باید مستطیل $QRR'Q'$، بیشترین مساحت را، بین‌مستطیل‌های به‌محیط ثابت $2c$ داشته‌باشد. پاسخ این‌مساله، روشن است: $QRR'Q'$، باید یك‌مربع باشد؛ یعنی $PQRS$، نصف‌یك‌مربع است: $PQ=RS=\frac{1}{4}c$ و $QR=\frac{1}{2}c$. درمسالهٔ C.۸، مقدار ثابت cبرابر است‌با ۶۰۰، بنابراین پاسخ‌آن، مستطیلی است بابعدهای ۱۵۰و۳۰۰فوت.

درمساله‌های C.۱۴ و C.۱۵، کاربردهای دیگری از نظام تقارن را می‌توان پیدا کرد. دراین‌جا، مسالهٔ C.۱۵ را حل می کنیم (بااین فرض که، مسالهٔ C.۱۴ را حل کرده‌ایم). اگر قرینهٔ تمام جعبه را، نسبت به‌صفحه‌ای



شکل ۵.۳ - b

که از چهار راس بالای آن گذشته است، پیدا کنیم، ازمجموع خود جعبه و قرینهٔ آن، مکعب مستطیلی به‌دست می‌آید که‌حجمی ثابت‌دارد وباید حالتی را پیدا کنیم که سطح کل آن، حداقل مقدار ممکن باشد. بنا بر مسالهٔ ۱۴.C، باید این مکعب مستطیل به مکعب تبدیل‌شود. به‌این ترتیب، پاسخ مسالهٔ ۱۵.C، عبارت است از نصف یك مکعب. حجم این نیم مکعب برابر است با K؛ اگر طول وعرض و ارتفاع آن‌رابه‌ترتیب x،xو $\frac{x}{2}$ بگیریم، می‌توانیم از معادلهٔ $\frac{1}{2}x^3=K$، مقدار x را به‌دست بیاوریم: $x=\sqrt[3]{2K}$.

درپایان، مسالهٔ ۲۱.C را حل شده فرض می‌کنیم و، سپس، باتوجه به‌تقارن، مسالهٔ ۲۲.C را حل می‌کنیم. اگر قرینهٔ استوانهٔ مسالهٔ ۲۲.C را، نسبت به‌صفحه‌ای که ازقاعدهٔ بالایی‌آن گذشته است، پیدا کنیم. به‌استوانهٔ کامل مسالهٔ ۲۱.C می‌رسیم. بنا براین پاسخ $h=2r$ درمسالهٔ ۲۱.C، پاسخ $h=r$ را برای مسالهٔ ۲۲.C به‌ما می‌دهد.

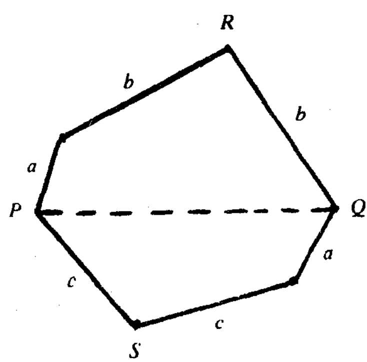
دراین‌مساله‌ها، ازموقعیت‌هایی که برایمان‌شناخته بود، به‌موقعیت‌هایی عبور می‌کردیم که نصف آن بود: ازمربع به‌نصف مربع، از مکعب به‌نصف مکعب و از استوانه به‌نصف‌آن. درحالت‌های دیگر، وقتی که باموقعیت‌های دیگری روبه‌رو باشیم، به توجهی بیشتر نیاز داریم. به‌این قضیه توجه کنید:

قضیهٔ۵.۳–a. ازبین همهٔ شش‌ضلعی‌های با محیط ثابت، شش‌ضلعی منتظم، دارای بیشترین مساحت است.

برای اثبات این قضیه، از تقارن و هم ازنتیجهٔ مسالهٔ ۹.C استفاده می‌کنیم. از شش‌ضلعی نامنظم H_1، به‌محیط ثابت k آغاز وثابت می‌کنیم که: شش‌ضلعی منتظم با محیط k، دارای‌حداکثر مساحت است. اگر ازقضیهٔ ۲.۳–b، برای شش‌ضلعی H_1، دربارهٔ هر دوضلع متوالی آن، استفاده کنیم، به‌این‌نتیجه‌می‌رسیم که، شش‌ضلعیH_2، با ضلع‌های a،a،b،b،c،c، مساحتی بیشترازِH_1 دارد ($2a+2b+2c=k$). P را راسی از H_2 می‌گیریم که درآن‌جا، دوضلع برابر a به‌هم رسیده‌اند و Q را راس روبه‌روی راس P

فرض می‌کنیم. خط راست PQ، شش‌ضلعی را به دو چهارضلعی تقسیم می‌کند که ضلع‌های یکی از چهارضلعی‌ها برابر a، b، b و PQ وضلع‌های چهارضلعی دوم، برابر a، c، c و PQ است. اکنون، قرینهٔ یکی از این چهارضلعی‌ها را نسبت به عمودمنصف پاره‌خط PQ پیدا می‌کنیم و چهارضلعی دوم را، بدون هیچ تغییری، نگه می‌داریم. شش ضلعی H_3 به‌دست می‌آید که، ضلع‌های آن به‌ترتیب، a، b، b، a، c، c است (شکل ۵.۳-c). راس بین دوضلع به‌طول b را، در H_3، R می‌نامیم. S راس روبه‌رو به R است که بین دوضلع به‌طول c واقع شده است. پاره‌خط RS، شش‌ضلعی H_3 را به‌دو چهار ضلعی تقسیم می‌کند که محیط هرکدام از آن‌ها، برابر $RS+a+b+c$ است. اکنون،از مسالهٔC. ۹در بارهٔ این چهارضلعی استفاده‌می کنیم. درهریك‌ازاین‌چهارضلعی‌ها، ضلع RS متغیر ومجموع‌سه‌ضلع دیگر، مقداری‌ثابت است. بنابراین،هرکدام ازچهارضلعی‌ها، وقتی به‌حداکثر مساحت خود می‌رسندکه‌طول هریك از سه ضلع آن‌ها (به‌استثنای RS، برابر $\frac{k}{3}=\frac{a+b+c}{3}$ باشد،یعنی‌هرچهارضلعی به‌نیمی از شش‌ضلعی منتظم تبدیل شود. درگام‌هایی که از شش‌ضلعی H_1 تا شش‌ضلعی منتظم برداشتیم، مرتباً شاهد افزایش مساحت بودیم و، بنابراین، اثبات قضیه، به‌انجام می‌رسد.

۶.۳. نتیجه‌های هم‌ارز. می‌دانیم ازبین همهٔ مثلث‌های بامحیط‌معلوم



شکل ۵.۳ - c

c، مثلث‌متساوی‌الاضلاع، بیشترین‌مساحت را دارد. این نتیجه گیری ـ قضیهٔ a-۲.۳ ـ از دیدگاه منطقی، باقضیهٔ زیر هم‌ارز است:

از بین همهٔ مثلث‌های با مساحت معلوم k، مثلث متساوی‌الاضلاع، کمترین محیط را دارد.

وقتی می گوییم، این‌دو نتیجه، از دیدگاه منطقی، هم‌ارزند، به‌این معناست که‌می‌توان ازهر کدام، دیگری را به‌دست‌آورد. اکنون قضیه a-۲.۳ را درنظر می گیریم و، به کمك آن، قضیه هم‌ارز آن را (که دربالا آوردیم) ثابت‌می‌کنیم. ازبین‌همهٔ‌مثلث‌های به‌مساحت معلوم k، مثلث‌متساوی‌الاضلاع T_1 را انتخاب می کنیم و محیط آن را p_1 می گیریم (البته، بین مساحت و محیط یك مثلث متساوی‌الاضلاع، رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد، ولی ما دراین جا، ازاین‌رابطه استفاده نمی کنیم. اثبات ما دراین جا، از دیدگاه‌منطقی، به هیچ رابطهٔ خاصی نیاز ندارد. استفادهٔ از رابطه، این اشکال را داردکه ممکن است، برای مثلث‌هایی که درموقعیت دیگری‌هستند، برای محاسبهٔ‌چنین رابطه‌ای، به‌دشواری بیشتری برخورد کنیم. به‌همین مناسبت، تنها ازرابطهٔ منطقی ساده پیروی‌می کنیم). می‌خواهیم ثابت کنیم، مثلث دیگری به‌مساحت k وجود نداردکه محیطی کوچکتر یا برابر p_1 داشته باشد.

برای اثبات، از برهان خلف استفاده می کنیم وفرض می کنیم مثلثی غیرمتساوی‌الاضلاع، مثل T_2، وجود داشته باشدکه برای محیط آن، p_2، داشته باشیم: $p_2 \leqslant p_1$. حالت‌های $p_2 = p_1$ و $p_2 < p_1$ را از هم جدا می کنیم. درحالت $p_2 = p_1$، با دو مثلث T_1 و T_2 سروکار داریم که یکی متساوی‌الاضلاع و دیگری غیرمتساوی‌الاضلاع است، ولی هر دو، محیطی برابر p_1 ومساحتی برابر k دارند. و این ممکن نیست، زیرا ازبین‌مثلث‌های با محیط p_1، مثلث‌متساوی‌الاضلاع T_1، تنها مثلثی است که حداکثرمساحت را دارد. (قضیهٔ a-۲.۳).

اکنون فرض می کنیم $p_2 < p_1$. T_3 را مثلث متساوی‌الاضلاعی بامحیط p_2 درنظر می گیریم. اگر مساحت این مثلث را k_3 بنامیم، باید داشته‌باشیم: $k_3 > k$؛ زیرا T_3متساوی‌الاضلاع‌است وT_2 متساوی‌الاضلاع

نیست. ازطرف دیگر، اگر دو مثلث متساوی‌الاضلاع T_1 و T_2 را باهم مقایسه کنیم، می‌بینیم که T_2 محیط کمتری دارد و، بنابراین، مساحت آن‌نیز کمتر است: $k_2 < k$. تناقض حاصل، به‌معنای آن است که فرض $p_2 < p_1$ نادرست است. درنتیجه، حکم $p_2 > p_1$ ثابت می‌شود.

به‌عنوان نمونهٔ دوم حکم‌های هم‌ارز، نتیجهٔ مسالهٔ ۱۴.C را درنظر می‌گیریم: «ازبین همهٔ مکعب مستطیل‌های با حجم ثابت، مکعب کمترین سطح را دارد»؛ وحکم هم‌ارز آن را ثابت می‌کنیم: «ازبین همهٔ مکعب مستطیل‌های باسطح ثابت c، مکعب بیشترین حجم را دارد».

R_1 را مکعبی به‌سطح c و حجم V_1 می‌گیریم و، شبیه مسالهٔ قبل، اثبات را با برهان خلف می‌آوریم. فرض می‌کنیم مکعب‌مستطیل دیگری، مثل R_2، باسطح c وحجم V_2 وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که داشته باشیم: $V_2 \geqslant V_1$. در حالت $V_2 = V_1$، با دو مکعب مستطیل R_1 و R_2 سروکار داریم‌که اولی مکعب است، ولی دومی مکعب نیست، ولی حجم و سطحی برابر دارند. و این، باتوجه به‌مسالهٔ ۱۴.C ممکن نیست.

اکنون فرض‌کنید $V_2 > V_1$. R_3 را مکعبی به‌حجم V_2 می‌گیریم که مساحت سطح کل‌آن برابر S_3 باشد. ازمقایسهٔ R_2 و R_3 نتیجه می‌شود که، باتوجه به‌برابر بودن حجم آن‌ها، باید مکعب R_3 سطح کمتری داشته باشد (مسالهٔ ۱۴.C)، یعنی $S_3 < c$. ازطرف‌دیگر، ازمقایسهٔ دومکعب R_1وR_3، به‌نابرابری $S_3 > c$ می‌رسیم. وجودتناقض، به‌معنای‌درستی‌حکم قضیه‌است.

اثبات‌ها دراین دومثال، شکلی مشابه‌دارند. درحالت کلی، «محیط‌ثابت» و «مساحت ماکزیمم» نتیجه‌ای هم‌ارز «مساحت ثابت» و «محیط می‌نیمم» دارد. به‌همین ترتیب، درفضای سه‌بعدی، می‌توانیم از «سطح ثابت» و «حجم ماکزیمم»، به«حجم‌ثابت» و«سطح‌می‌نیمم» برسیم. ازاین‌به‌بعد، این‌نتیجه‌های مشابه را، بدون اثبات خواهیم آورد.

قضیهٔ زیرهم، ازنظرمنطقی، باقضیهٔ ۲.۳–b هم‌ارزاست: ازبین‌مثلث‌های بامساحت و یك ضلع ثابت، مثلث متساوی‌الساقین، کمترین محیط را دارد.

نتیجه‌گیرهای هم‌ارز، بسیار زیباتر ازآن است‌که مساله‌ها را، به‌طور

جداگانه، تنظیم کنیم، زیرا توجه به‌این‌مطلب، به‌ما کمك می‌کند تا بادر نظر گرفتن صورت‌های هم‌ارز، تنظیم‌های ساده‌تر وتازه‌تری ازمساله را پیدا کنیم به‌این مثال توجه کنید:

I. از بین مثلث‌های PQR، با زاویهٔ ثابت P ومحیط مفروض، کدام مثلث، مساحت ماکزیمم دارد؟

که با مسالهٔ زیر هم‌ارز است:

II. ازبین همهٔ مثلث‌های PQR بازاویهٔ ثابت P و مساحت مفروض، کدام مثلث، محیط می‌نیمم دارد؟

صورت دوم این مساله، برای حل ساده‌تر است و، بنابراین، حل آن را به‌حل مسالهٔ اول ترجیح می‌دهیم.

x و y و z را، به‌ترتیب، طول ضلع‌های PQ و PR و QR، و θ را زاویهٔ ثابت به‌راس P می‌گیریم. اگر مساحت مثلث را با A ومحیط آن‌را با L نشان دهیم، داریم:

$$A=\frac{1}{2}xy\sin\theta \quad , \quad L=x+y+(x^2+y^2-2xy\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

چون θ و A ثابت‌اند، بنابراین مقدار xy نیز ثابت است. به‌این‌ترتیب، $x+y$ وقتی به‌حداقل‌خود می‌رسد که داشته‌باشیم: $x=y$. به‌همین‌ترتیب، x^2y^2 مقدار ثابتی است، پس x^2+y^2 وقتی کمترین مقدار می‌شود که‌داشته باشیم: $x=y$ به (۱) برمی‌گردیم. در L، مقدار $2xy\cos\theta$ ثابت است، درنتیجه مقدار L وقتی به‌حداقل خود می‌رسد که x و y با هم برابر باشند. مسالهٔ دوم حل شد. همین جواب برای مسالهٔ اول هم صادق است. جواب هر دو مساله این است: مثلث PQR باید متساوی‌الساقین باشد.

۷.۳ دایره‌های کمکی. اغلب استفادهٔ از دایرهٔ کمکی، به‌خصوص در مساله‌های ترسیمی، می‌توانند به‌حل مساله کمك کند. به‌عنوان نمونه، دو مسالهٔ اول بند ۴.۳ را، با اندك تغییری دراین‌جا می‌آوریم.

مسالهٔ۱. نقطهٔ P در داخل زاویهٔ QOR داده شده است. چگونه

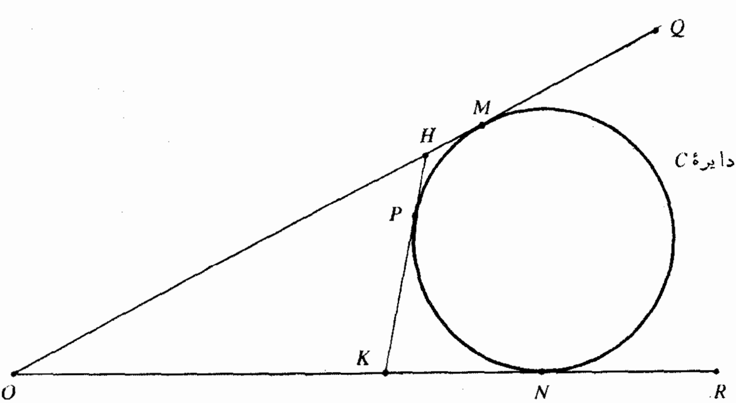
می‌توان نقطهٔ H را بر OQ و نقطهٔ K را بر OR به‌نحوی انتخاب کرد که نقطه‌های H و P و K روی یک‌خط راست باشند و، درضمن، مثلث HOK دارای حداقل محیط باشد؟

کلیدحل مساله، رسم دایره‌ای است که از نقطهٔ P بگذرد و برخطهای راست OQ و OR مماس باشد (شکل ۷.۳-a). جواب مساله، خط‌راست HPK است که درنقطهٔ P براین دایره مماس است.

نقطه‌های تماس دایره باخطهای‌راست OQوOR را M وNمی‌نامیم. برای محیط مثلث HOK می‌توان نوشت:

$$OH+OK+HK=OH+OK+PH+PK=$$
$$=OH+OK+HM+KN=$$
$$=OM+PN=۲OM$$

(دراین‌جا، ازاین حقیقت استفاده‌کرده‌ایم که: دو مماس وارد از یک نقطه بر دایره، باهم برابرند). اکنون، اگر پاره‌خط راست دیگری مثل $H_۱PK_۱$ را درنظر بگیریم ($H_۱$ بر OQ و $K_۱$ بر OR واقع است)، ثابت می‌کنیم که محیط مثلث $H_۱OK_۱$ ازمحیط مثلث HOK بیشتر است. برای این‌منظور، کافی است ثابت کنیم که دایرهٔ $C_۱$ از دایرهٔ C بزرگتر است (دایرهٔ $C_۱$مماس



شکل ۷.۳-a

برخطهای راست H_1K_1، H_1Q و K_1R است)؛ و این روشن است، زیرا نقطهٔ P دربیرون دایرهٔ C_1 قرار دارد.

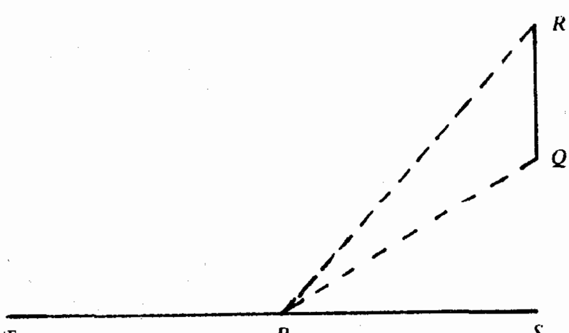
مسالهٔ زیر را هم می‌توان با دایرهٔ کمکی حل کرد.

مسالهٔ۲. (مسالهٔ عکس روی دیوار). تصویری روی دیوار، بالاتراز سطح دید تماشاگر نصب شده است. تماشاگر، درچه فاصله‌ای بایستد تا حداکثر زاویهٔدید را نسبت به‌تصویر داشته‌باشد؟ (یعنی، زاویهٔ بین پرتوهایی که از بعدهای بالا و پائین تصویر به‌چشم بیننده‌می‌رسد، بیشترین مقدارممکن باشد؟).

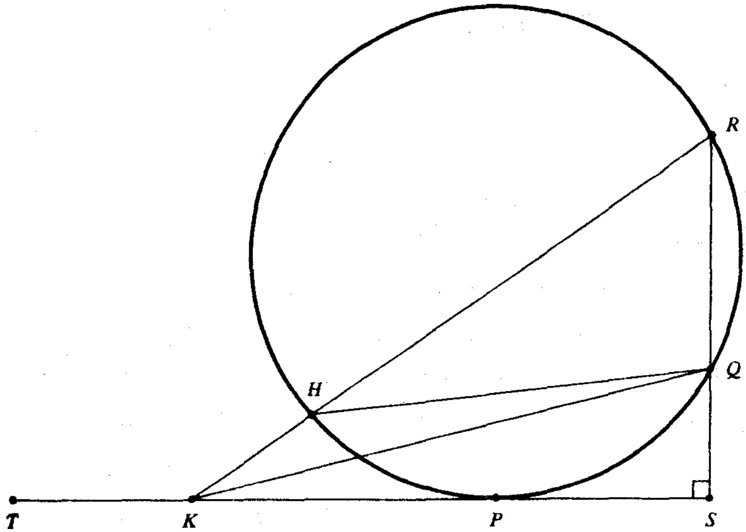
طرح مساله درشکل ۷.۳-b داده شده است: Q و R، ابتدا وانتهای تصویر و TS امتداد خط افقی است که از چشم بیننده می گذرد. در واقع، باید نقطهٔ P را برخط راست TS طوری انتخاب کنیم که زاویهٔ QPR حداکثر مقدار ممکن باشد. مساله را، ابتدا، با روش هندسی و، سپس، جواب را به‌صورت جبری تنظیم می کنیم.

کلید حل مساله، دایره‌ای است که از دونقطهٔ Q و R بگذرد و برخط راست TS مماس باشد. نقطهٔ P، همان نقطهٔ تماس دایره با خط راست TS است (شکل ۷.۳-c). اگر K نقطهٔ دیگری ازخط راست TS باشد، ثابت می کنیم: $\widehat{QPR}>\widehat{QKR}$.

اگر H را نقطهٔ برخورد خط راست RK با دایره بگیریم، روشن



شکل ۷.۳-b



شکل ۳-۷-c

است که دو زاویهٔ QPR و QHR باهم‌برابرند (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به‌یک کمان). بنابراین

$$\widehat{QPR}=\widehat{QHR}=\widehat{QKR}+\widehat{HQK}>\widehat{QKR}$$

به‌این‌ترتیب، زاویهٔ دید وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسدکه چشم بیننده، درنقطهٔ تماس P قرار گیرد. این جواب، برای حالتی هم که، تصویر، چسبیده به‌دیوار نباشد وسطح آن نسبت بـه‌سطح دیوار تمایل داشته باشد، درست است، زیرا درهرحال (چه QR نسبت به TS عمودی باشدوچه‌مایل)، تنها یك دایره وجود داردکه از Q و R بگذرد و برخط راست‌افقی هم‌سطح چشم مماس باشد.

این مساله، برای حـالت عمودی QR، در اغلب کتاب‌هـای حساب دیفرانسیل و انتگرال آمده است ومعمولاً، به‌عنوان جواب، فاصلهٔ PS را به‌دست می‌آورند. درواقع، بامفروض‌بودن $QS=b$ و $RS=c$، باید PS را محاسبه کنیم. باتوجه به‌شکل ۳-۷-c داریم:

$$SP^{2}=SQ.SR=b.c \Rightarrow SP=\sqrt{bc}$$

مساله‌های گوناگون

C.۲۷۰. زاویهٔ $\widehat{PQR}<180^\circ$ وعدد ثابت ومثبت c مفروض‌اند. نقطه‌های H و K را برنیم‌خطهای QP و QR چگونه انتخاب کنیم که داشته باشیم: $HK=c$ و، درضمن، مثلث HQK، حداکثر مساحت را داشته باشد؟

C.۲۸۰. دونقطهٔ A و B و خط راست PQ دریك صفحه‌اند. نقطهٔ K را روی PQ طوری پیدا کنید که $AK^{2}+KB^{2}$ می‌نیمم باشد.

C.۲۹۰. I. سه نقطهٔ AوBوC، به‌همین‌ردیف، بریك خط راست داده شده‌اند. نقطهٔ P را براین‌خط طوری پیدا کنید که $PA+PB+PC$، حداقل مقدار ممکن باشد؛

II. نقطه‌های A، B، CوD، به‌همین‌ردیف، برخط راستی داده‌شده‌اند. نقطهٔ P را روی‌این‌خط طوری‌پیدا کنید که‌مجموع $PA+PB+PC+PD$ حداقل مقدار ممکن باشد،

III. مساله را تعمیم دهید، یعنی برای n نقطهٔ واقع برخط راست، نقطهٔ P را روی همان خط طوری پیدا کنید که مجموع فاصله‌های از نقطهٔ P تا این n نقطه، می‌نیمم باشد.

C.۳۰۰. اطاقی است به‌شکل مکعب مستطیل به‌طول ۱۸، عرض ۱۴ و ارتفاع ۱۰ فوت. مگسی در امتداد کوتاه‌ترین مسیر ممکن، از یك گوشهٔ اطاق به‌گوشه مخالف آن پرواز می‌کند (مثلاً، ازگوشهٔ جنوب‌شرقی‌در کف اطاق، به‌گوشهٔ شمال‌غربی روی سقف اطاق). طول مسیری را که مگس طی می‌کند، پیدا کنید.

C.۳۱۰. درمسالهٔ قبلی، فرض‌کنید مورچه‌ای از یك گوشه به‌گوشهٔ مخالف حرکت کند. هربخش از کف اطاق، دیوارها وسقف را می‌توان برای کوتاه‌ترین مسیر انتخاب کرد (کف، دیوارها وسقف را سطح‌هایی هموار و مستوی‌می‌گیریم). مورچه، چه‌مسافتی را می‌پیماید؟

C.۳۲۰. پاره‌خط راستی را درنظر می‌گیریم (دو انتهای این پاره‌خط‌را

هم به‌حساب می‌آوریم). چگونه می‌توان n نقطه را روی این پاره‌خط انتخاب کرد (لازم نیست متمایز ازیکدیگر باشند) تا مجموع فاصله‌های بین هر دو نقطه ازاین نقطه‌ها، ماکزیمم باشد؟

۳۳.C مثلث دلخواهی مانند T با ضلع‌های به‌طول a، b و c مفروض است. آیا این درست‌است که هرمثلث مانند T' باضلع‌هایی کوتاه‌تر ازضلع‌های مثلث T، مساحتی کمتر ازمساحت مثلث T دارد؟ اگر ضلع‌های مثلث T' را a'، b' و c' فرض کنیم وبدانیم: $a'<a$، $b'<b$ و $c'<c$، آیا $S_{T'}<S_T$؟ اگر جواب‌مثبت است، آن را ثابت کنید. و اگر جواب منفی است، شرطهایی را برای مثلث T پیدا کنید که، بادر نظر گرفتن آن‌ها، نابرابری برای‌هرمثلث T' برقرار باشد.

۳۴.C بعدهای مستطیل به‌مساحت ماکزیمم را پیدا کنید که درناحیهٔ محدود به‌منحنی $y=12-x^2$ در بالای محور xها و پاره‌خطی که‌از دونقطهٔ $(\sqrt{12},0)$ و $(-\sqrt{12},0)$ می‌گذرد، محاط شده باشد. ضلع‌های مستطیل را موازی بامحورهای‌مختصات بگیرید. همچنین‌مساحت بزرگترین‌ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که درهمان ناحیه محاط شده باشد و یك‌ضلع آن پاره‌خط راستی باشدکه‌دونقطهٔ $(\sqrt{12},0)$ و $(-\sqrt{12},0)$ دو انتهای آن را تشکیل‌دهند.

۳۵.C می‌خواهیم با پارچه ضخیمی، چادری مخروطی شکل، بدون کف، باحجم ثابت مفروض بسازیم. نسبت ارتفاع h به‌شعاع قاعدهٔ r آن را چگونه بگیریم، تا پارچه‌لازم برای ساختن چادر، حداقل مقدار ممکن‌باشد؟

[برای محاسبهٔ حجم وسطح جانبی مخروط، باید ازدستورهای $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ و $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ استفاده‌کرد.]

۳۶.C (کاربردی ازهندسه در جبر). ثابت‌کنید نابرابری

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2} \qquad (1)$$

برای عددهای حقیقی a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 برقرار است درضمن،

نابرابری، تنها وقتی به‌برابری تبدیل می‌شود که نقطه‌های $(a_۱,b_۱)$، $(a_۲,b_۲)$ و $(a_۳,b_۳)$ با مبداء مختصات دریك امتداد باشند و دریك‌طرف مبداء قرار گیرند. این‌شرط را به‌این‌صورت هم می‌توان توضیح داد که: زوج‌های $a_۱$، $b_۱$ و $a_۲$، $b_۲$ و $a_۳$، $b_۳$ متناسب باشند و ازبین عددهای $a_۱$،$a_۲$،$a_۳$، هیچ دوعددی‌دارای علامت مخالف نباشند. [مجموع فاصله‌های $OP+PQ+QR$ را با فاصلهٔ OR مقایسه‌کنید‌که، در آن‌ها، O مبداء مختصات و P و Q و R نقطه‌هایی، به‌ترتیب، با مختصات $(a_۱,b_۱)$ و $(a_۱+a_۲, b_۱+b_۲)$ و $(a_۱+a_۲+a_۳, b_۱+b_۲+b_۳)$ هستند.]

نابرابری (۱) را می‌توان به‌این‌صورت تعمیم داد‌که، در سمت چپ، مجموع جمله‌های به‌صورت $\sqrt{a_j^۲+b_j^۲}$ $(j=۱,۲,\ldots,m)$ را در نظر بگیریم و، درسمت راست، تغییر مناسب را ایجاد‌کنیم. علاوه براین، اگر نقطه‌ها را درفضای سه‌بعدی (که نسبت به‌صفحه برتری‌دارد) درنظربگیریم، می‌توان به‌جای نقطهٔ $(a_۱,b_۱)$، نقطهٔ$(a_۱,b_۱,c_۱)$ را قرارداد ورادیکال‌های سمت چپ را به‌صورت کلی‌تر $\sqrt{a_۱^۲+b_۱^۲+c_۱^۲}$ درآورد؛ به همین‌ترتیب، می‌توان تعمیم طبیعی مساله را درفضای n بعدی به‌دست آورد.

C.۳۷. ذوزنقه‌هایی را درنظر می‌گیریم که دوضلع موازی هرکدام از آن‌ها برابر a و b $(a\neq b)$ و ارتفاع هرکدام از آن‌ها برابر h باشد (a، b وh، مقدارهای ثابت ومثبتی هستند). ثابت‌کنید، ازبین این ذوزنقه‌ها، ذوزنقه‌ای حداقل محیط را دارد که متساوی‌الساقین باشد.

C.۳۸. اگر a،b،cوd، عددهای حقیقی مثبتی باشند، به‌ازای چه مقدار حقیقی x، عبارت زیر می‌نیمم می‌شود:

$$\sqrt{a^۲+(b-x)^۲}+\sqrt{c^۲+(d+x)^۲}$$

C.۳۹. نقطه یا نقطه‌هایی مانند Q را، درصفحهٔ چندضلعی منتظم، طوری‌پیدا‌کنید‌که، مجموع فاصله‌های Q تا ضلع‌های‌چندضلعی(یعنی مجموع طول پاره‌خط‌های عمودی‌که ازنقطهٔ Q بر ضلع‌های چندضلعی فرود می‌آیند) حداقل مقدار ممکن باشد.

C.۴۰۰ نقطهٔ P در درون زاویهٔ QOR واقع است. نقطه‌های H و K را، به‌ترتیب، بر OQ و OR طوری پیدا کنیدکه H و P و K روی‌یک خط راست باشند و، در ضمن، حاصل‌ضرب $PH.PK$، حداقل مقدار ممکن بشود. [از دایرهٔ کمکی مماس بر OQ و OR استفاده کنید.]

C.۴۰۱ نقطهٔ P در ۱۰۰۰ متری شمال نقطهٔ Q قرار دارد. دوچرخه‌سوار A، از نقطهٔ P به‌طرف جنوب و باسرعت ۶متر درثانیه و، در همان‌لحظه، دوچرخه‌سوار B، از نقطهٔ Q به‌سمت شرق و باسرعت ۸ متر در ثانیه، آغاز به‌حرکت می‌کنند. کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو دوچرخه‌سوار AوB را پیدا کنید.

C.۴۰۲ در مجموعه‌ای از نقطه‌ها، بنابه‌تعریف، قطر مجموعه را به کوچکترین کران بالای فاصله‌های بین هردونقطه از نقطه‌های مجموعه گویند. برای چند ضلعی، کوچکترین کران بالا، همان ماکزیمم فاصله‌هاست (قطر هرچندضلعی، ماکزیمم‌فاصله از بین فاصله‌های هر دو راس است). ثابت کنید، از بین چهارضلعی‌های به‌قطر واحد [قطر را به‌مفهوم تعریف بالا بگیرید]. بزرگترین‌مساحت ممکن، برابر $\frac{۱}{۲}$ است. همچنین، ثابت کنید، گرچه مربع به‌قطر واحد دارای این‌مساحت ماکزیمم است، ولی‌این تنها چهارضلعی‌ممکن به‌قطر واحد با مساحت $\frac{۱}{۲}$ نیست.

فصل چهارم

قضیه‌های هم‌پیرامونی

۱.۴. برخی تعریف‌ها. «هم‌پیرامونی» به‌معنای محیط ثابت است. مسالهٔ «هم‌پیرامونی»، یعنی جست و جوی حداکثر مساحت ممکن، برای ناحیه‌هایی (و مثلاً مثلث‌هایی) که محیطی ثابت داشته باشند. هم‌ارزمنطقی این مساله، جست‌وجوی ناحیه‌ای با کمترین محیط، برای شکل‌های بامساحت ثابت است. مسالهٔ هم‌پیرامونی در فضای سه‌بعدی به‌معنای جست وجوی حداکثر حجم درمیان جسم‌های باسطح کل ثابت است.

دراین فصل، دوقضیهٔ مهم را ثابت‌خواهیم کرد: ازبین همهٔ nضعلی‌های بامحیط ثابت، n ضلعی منتظم، حداکثر مساحت را دارد؛ و ازبین همهٔ منحنی‌های بستهٔ سادهٔ به‌طول ثابت، دایره حداکثر مساحت را دارد.

منحنی‌های بسته، به‌منحنی‌هایی گویندکه نقطهٔ پایانی ندارند و، بنابراین، اگر رسم شکل را ازنقطه‌ای مثل P آغاز کنیم و دریک جهت ادامه دهیم، دوباره به‌نقطهٔ P می‌رسیم. منحنی را بستهٔ ساده گوییم، وقتی درهیچ نقطه باخودش برخورد نداشته باشد و یا بر خودش مماس نباشد. به‌این‌ترتیب، دایره، مثلث، مستطیل و بیضی، منحنی‌های بستهٔ ساده‌اند، درحالی‌که، مثلاً منحنی 8، بسته است ولی ساده نیست.

قضیه‌هایی‌که دراین فصل ثابت شده‌اند، براین‌فرض استوارندکه، ناحیه بامساحت‌ماکزیمم ومحیط ثابت، وجود دارد. درفصل‌دوازدهم، به‌قضیه‌های مشابهی خواهیم پرداخت که، بدون این پیش‌فرض، تنظیم شده‌اند. دربند ۵.۴، دربارهٔ وجود جواب و، در ضمن، منحصر به‌فرد بودن جواب، بحث کرده‌ایم: مثلاً درمسالهٔ C.۱۰ دیدیم که ازبین چهارضلعی‌های مقعر بامحیط ثابت، نمی‌توان یك چهارضلعی بامساحت حداکثر پیدا کرد.

دراین‌جا، ازطول منحنی‌ها و یا مساحت محدود به‌منحنی‌های سادهٔ

بسته، تجزیه وتحلیل دقیقی ندادهایم وتصور می کنیم که، یادداشت‌های زیر، برای درك شهودی مطلب، کافی است. طـول یا فاصله را، ابتدا، بـه‌وسیلهٔ خط راست و با انتخاب واحد دلخواه برای طول، تعریف می کنند. طول یك منحنی، از نقطهٔ A تانقطهٔ B را، به‌این‌ترتیب، تعریـف می کنیم: درفـاصلهٔ بین دونقطهٔ AوB و روی‌منحنی، نقطه‌های P_{1}، P_{2}،...، P_{n-1} راانتخاب می کنیم؛ نقطه A را P_{0} ونقطهٔ B را P_{n} می‌نامیم. مجموع طول وترهای متوالی را تشکیل می‌دهیم:

$$P_{0}P_{1}+P_{1}P_{2}+\dots+_{n-1}P_{n} \qquad (1)$$

اگر مجموع (۱)، وقتی که n را بـه‌طور نامتناهی بزرگ کنیم $(n\to\infty)$ و اگر بزرگترین جملهٔ مجموع (۱) به‌سمت صفر میل کند، دارای حدی باشد، این حد را به‌عنوان طـول منحنی AB تعریف می کنیم. درحـالتی که منحنی خیلی‌نامنظم باشد، چنین حدی وجود ندارد. درچنین حالتی، نمی‌توان‌طولی برای منحنی تعریف کرد.

مساحت، درمـرحلهٔ اول، بـرای مربع واحـد تعریف می‌شود، یعنی مربعی که طول ضلع آن برابر واحد بـاشد. باتوجه به‌این تعریف، به‌سادگی می‌توان مساحت مستطیل، متوازی‌الاضلاع، مثلث و یا، به‌طور کلی، یك n ضلعی‌را تعریف ومحاسبه کرد. سپس، مساحت یك‌ناحیه ازصفحه را،به‌صورت بزرگترین کران پایین مجموعه‌ای مانند S از عددها تعریف می کنیم: هر عدد از این مجموعه، معرف مجموع مساحت‌های مربع‌های مساوی ونامتقاطعی است که ناحیهٔ مزبور را می‌پوشانند.

این تجزیه وتحلیل از طول و مساحت، درکی‌شهودی از ماهیت آن‌ها به‌ما می‌دهد و، همین، برای‌هدفی که دنبال می کنیم، کافی است. باوجوداین، وقتی که می‌خواهیم از n ضلعی با محیط ثـابت ومساحت حداکثر یا ناحیهٔ با محیط ثابت ومساحت حداکثر صحبت کنیم، درگام اول، خود را به‌nضلعی‌ها وناحیه‌های محدب محدود می کنیم. نـاحیهٔ محدب R درصفحه، به‌ناحیه‌ای گفته می‌شود که شامل هرپـاره‌خطی باشدکه دونقطهٔ دلخواه از ناحیهٔ R را به‌هم وصل می کند. دورهٔ ناحیهٔ محدب، وقتی کـه محدود به‌یك منحنی سادهٔ

بسته باشد، دارای طول است و، خود ناحیه، مساحت دارد (دراین‌جا، واژه «دوره» به‌معنای آن است که ناحیهٔ موردنظر را «محصور» می‌کند، والامثلاً ربع اول دستگاه مختصات درصفحه، مساحت یا محیط محدودی ندارد).

ازاین به‌بعد، وجود مساحت ومحیط را، برای ناحیه‌های محدب، مفروض می‌گیریم و، بدون این‌که هر بار برآن تاکید بگذاریم، خود را به‌منحنی‌ها یا ناحیه‌های محدود می‌کنیم که محدب ودارای طول و مساحت موردنیاز در اثبات، باشند.

چندضلعی را وقتی منتظم گوییم که هم‌ضلع‌ها وهم‌زاویه‌های آن، باهم برابر باشند، هرچندضلعی منتظم، قابل محاط دریك دایره و قابل محیط بریك دایره است؛ یعنی اولاً دایره‌ای وجود دارد که ازهمهٔ راس‌های چندضلعی می‌گذرد و، ثانیاً دایره‌ای‌وجود دارد که برهمه‌ضلع‌های‌چندضلعی مماس‌است.

D۰۱ (a) آیا هر n ضلعی قابل محاط در دایره، به‌شرطی‌که ضلع‌های برابر داشته باشد، منتظم است؟ چرا؟ (b) آیا همین حکم، در مورد nضلعی محیط بر دایره هم، درست است؟

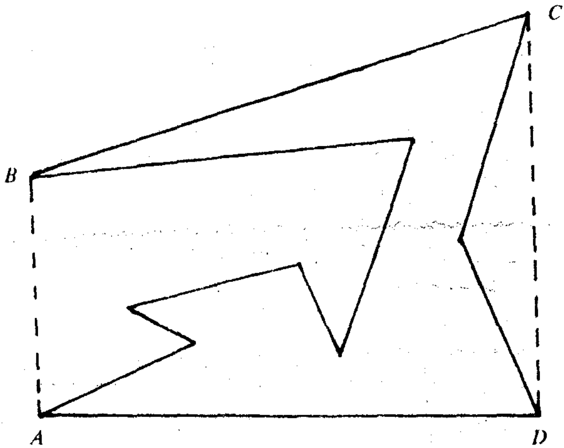
D۰۲ (a) آیا nضلعی محاط دریك دایره، که زاویه‌های داخلی برابر داشته باشد، یك چندضلعی منتظم است؟ چرا؟ (b) آیا همین حکم، دربارهٔ چندضلعی محیط بریك دایره هم، درست است؟

۲.۴. چندضلعی‌ها

قضیهٔ ۲.۴-a. اگر n ضلعی P منتظم نباشد، می‌توان n ضلعی دیگری مانند P_1 بامحیطی برابر محیط P پیدا کرد که مساحتی بیشتر از مساحت P داشته باشد.

این قضیه را، قبلاً و درفصل سوم، برای حالت‌های خاص $n = ۳$ و $n = ۴$ ثابت کرده‌ایم.

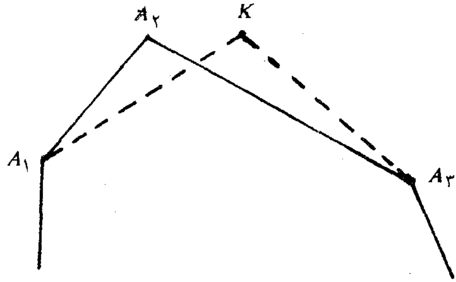
اگر P محدب نباشد، «قشر محدب» P را درنظر می‌گیریم که عنوان کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل P تعریف می‌شود. درشکل ۲.۴-a، شکل مقعر P، که در داخل «قشر محدب» خود، چهارضلعی $ABCD$ قرار گرفته،



شکل ۲۰۴–a

نشان داده شده است به‌طـور کلی «قشر محدب» H برای چندضلعی مقعر P، بخش داخلی یك چندضلعی محدب است با راس‌های کمتر، محیط کوچکتر، ولی مساحتی بزرگتراز چندضلعی P. روی محیط قشر محدب H، می‌توان، به تعداد کافی، نقطه‌هایی را در نظر گرفت و هرکدام از آن‌ها را یك راس به حساب آورد، به نحوی کـه همراه با راس‌های اصلی H، بتوان آن را یك nضلعی به‌حساب آورد؛ این‌عمل، محیط یا مساحت H راتغییر نمی‌دهد. اکنون P_1 را یك nضلعی می گیریم که، ازنظرهندسی، شبیه‌دورهٔ H، ولی محیطی برابر محیط P داشته باشد. مساحت P_1 بزرگتراز‌مساحت H و، بنابراین، بزرگتر از مساحت P است.

حالا به‌حالتی می‌پردازیم که چندضلعی مفروض P، محدب باشد. خود این حالت را، به‌دوحالت جـداگانه تقسیم می‌کنیم: اول، حـالتی کـه همهٔ ضلع‌های P، طولی برابر بـاهم ندارند؛ و دوم، وقتی‌کـه همهٔ ضلع‌ها با هم برابرند. درحالتی‌که همهٔ ضلع‌های P باهم برابر نیستند، باید دو ضلع‌مجاور نابرابر وجود داشته باشد؛ فـرض می‌کنیم $A_1A_2 \neq A_2A_3$ (A_1، A_2، A_3، راس‌های متوالی Pاند). بنابرقضیهٔ ۲.۳–b، اگر نقطهٔ K را در طـرفی از A_1A_3 کـه A_2 قـرار دارد، بـه‌نـحوی انتخاب‌کنیم‌کـه $A_1K = KA_3$ و



شکل ۲.۴-b

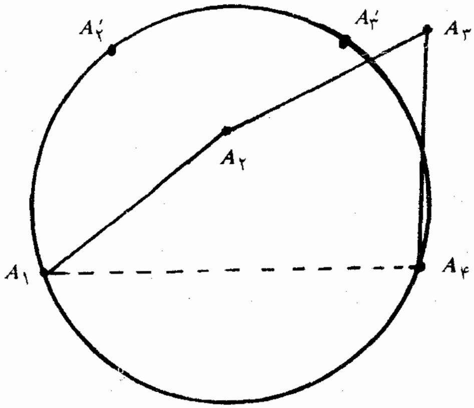
$A_۱K + KA_۳ = A_۱A_۲ + A_۲A_۳$، آن‌وقت، مساحت مثلث $A_۱KA_۳$ از مساحت‌مثلث $A_۱A_۲A_۳$ بزرگترمی‌شود. بنابراین، با انتخاب نقطهٔ K به‌جای نقطهٔ $A_۲$، می‌توان ازچندضلعی P به‌چندضلعی $P_۱$ رسیدکه بازهم باشرطهای مساله سازگار است.

اکنون، n ضلعی محدب P را با ضلع‌های برابر درنظرمی‌گیریم. چون P منتظم نیست، بنابراین راس‌های آن برمحیط یک دایره قرار ندارند. به‌این‌ترتیب، می‌توان چهار راس متوالی را، مثلاً $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$، پیدا کردکه روی محیط یک دایره نباشند، زیرا اگر هر چهار راس متوالی دلخواه، برمحیط یک‌دایره قرار گیرند، آن‌وقت، همه راس‌ها روی محیط‌دایره واقع می‌شوند و nضلعی، محاطی ازآب درمی‌آید [از هرسه نقطه‌ای که بریک خطراست واقع نباشند، یک دایره، و تنها یک‌دایره می‌گذرد].

بنابرقضیهٔ ۳.۳-b، یک چهارضلعی محاطی وجود داردکه ضلع‌های آن‌با ضلع‌های چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ برابر ومساحت آن بیشتراز مساحت چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ باشد. این‌چهارضلعی محاطی را $A_۱A'_۲A'_۳A_۴$ می‌نامیم که‌دو راس‌آن، $A'_۲$ و $A'_۳$، به‌جای $A_۲$ و $A_۳$ درنظر گرفته‌شده‌اند(شکل ۲.۴-c) همهٔ این ضلع‌ها برابرند:

$$A_۱A_۲ = A_۲A_۳ = A_۳A_۴ = A_۱A'_۲ = A'_۲A'_۳ = A'_۳A_۴$$

بنابراین، nضلعی $P_۱$ شبیه P به‌دست می‌آیدکه، درآن، راس‌های $A_۲$ و $A_۳$ به $A'_۲$ و $A'_۳$ تبدیل شده‌اند. $P_۱$، همان محیط P را دارد، ولی مساحتش از



شکل ۲.۴–c

از مساحت P بیشتر است.

قضیهٔ ۲.۴-b. از بین همهٔ nضلعی‌های بامحیط ثابت c، nضلعی منتظم، وتنها همین nضلعی، دارای مساحت ماکزیمم است.

P را nضلعی بامحیط ثابت c و دارای مساحت ماکزیمم فرض‌می‌کنیم. nضلعی P، بنابرقضیهٔ ۲.۴–a، یك nضلعی،منتظم است، زیرا درغیراین‌صورت، nضلعی P_1، شبیه آن و با محیط برابر c وجود داردکه مساحتی بیشتر از مساحت P داشته باشد. درضمن، P منحصر به‌فرد است، زیرا nضلعی‌منتظم منحصر به‌فرد است.

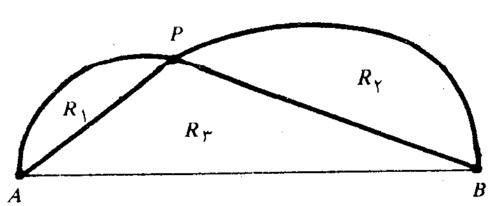
۳.۴. قضیهٔ هم‌پیرامونی. مسالهٔ پیداکردن شکلی با محیط معلوم و مساحت حداکثر به‌افسانه‌ای از روم‌باستان برمی‌گردد و به‌مسالهٔ دیدو (Dido) معروف شده است. ملکه‌دیدو، که کشتی‌اش شکسته بود، ازمردم ساحل‌نشین، قطعه زمینی را برای‌سکونت‌خود وهمراهانش، درخواست‌کرد. به‌اوبه‌اندازهٔ پوست یك گاونر زمین‌داده شد. ولی او، باهوشیاری، پوست گاو رابه‌صورت نوارهای باریکی برید و نوارها را باهم وصل کرد تا، به‌کمك نواردرازی که به‌دست آمد، بتواند منطقه وسیعی را احاطه‌کند و مالك شود. او درهمین زمین، شهرکارتاژ را بنا نهاد. مساله این است: دیدو به‌کمك نواری که از

پوست گاو به‌دست آورده است، چگونه و روی چه‌مسیری، دو نقطه از ساحل را به‌هم وصل کند تا حداکثر زمین را اشغال کرده باشد (ساحل را به خط مستقیم فرض می‌کنیم)؟ جواب، چنین است:

قضیهٔ ۳.۴-a. (مسالهٔ دیدو)، برای عدد ثابت و مثبت c، یک منحنی به‌طول c را پیدا کنید که بیشترین مساحت را بین خود و یک خط راست، محصور کرده باشد. (درشکل ۳.۴-a، مسیری از A، به B به‌طول c نشان داده شده است که مساحتی را بین خود و خط راست AB، محصور کرده است.) ثابت کنید، اگر این مسیر نیم‌دایره نباشد، می‌توان مسیر دیگری به‌طول c پیدا کرد که مساحت محصور به‌آن و خط راست، بزرگتر باشد، بنابراین، به‌شرطی که مسیری باسطح محصور ماکزیمم وجود داشته باشد، این مسیر، نیم دایره است.

این مساله، شبیه مساله‌های C.۸ و C.۹ است. کشاورزی می‌خواهد بیشترین مساحت را، با نرده‌کشی برای سه‌ضلع یک قطعهٔ مستطیلی شکل یا یک قطعهٔ به‌شکل چهارضلعی، درطول یک‌خط راست، به‌دست آورد. تنها تفاوتی که با مسالهٔ ما دارند، در این است که، دراین‌جا، کشاورز نردهٔ قابل انعطافی دراختیار دارد که می‌تواند آن را به‌دور هرمنحنی دلخواهی بکشد.

منحنی که از A به B، درشکل ۳.۴-a رفته است، نیم‌دایره نیست، بنابراین می‌توان نقطه‌ای مانند P روی آن پیدا کرد، به‌نحوی که $\widehat{APB}\neq 90^\circ$. اگر از A و B به P وصل کنیم، ناحیهٔ موردنظر، به‌سه‌بخش تقسیم می‌شود: بخش R_1، بین پاره‌خط راست AP و منحنی؛ بخش دوم R_2، بین پاره‌خط راست PB و منحنی؛ و بالاخره بخش R_3، بین ضلع‌های مثلث APB.



شکل ۳.۴-a

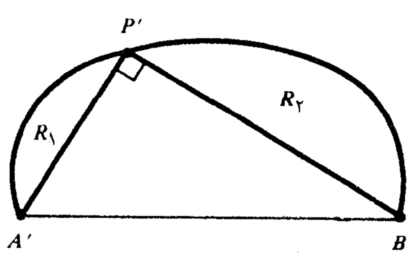
اکنون، منحنی دیگری با کمان‌های $A'P'$ و $P'B'$، به‌ترتیب، برابر با AP و PB رسم می‌کنیم، به‌نحوی که داشته باشیم: $\widehat{A'P'B'} = ۹۰^\circ$ (شکل‌b-۳.۴)، این موقعیت را،روشن‌تر می کنیم: ابتدا پاره‌خطهای $A'P'$ و $P'B'$ را عمود برهم طوری رسم می‌کنیم‌که داشته باشیم $A'P' = AP$ و $P'B' = PB$. سپس بخش $R_۱$ را روی $A'P'$ وبخش $R_۲$ را روی $P'B'$ منتقل می کنیم. بنابرقضیهٔ c-۲.۳، مساحت‌مثلث $A'P'B'$ ازمساحت مثلث APB بیشتراست. بنابراین، مساحت محصوربه‌منحنی $A'P'B'$ وخطراست $A'B'$، ازمساحت‌محصوربه‌منحنی APB وخطراست AB (درشکل a-۳.۴) بیشتر است (درحالی‌که، طول منحنی $A'P'B'$ باطول منحنی APB برابر است).

اکنون می‌توان، با استفاده ازنظام تقارن، نتیجهٔ بسیار جالب زیر را به‌دست آورد:

قضیهٔ b-۳.۴. (قضیهٔ هم‌پیرامونی). اگر منحنی بسته وسادهٔ $C_۱$ را در نظر بگیریم که دایره نباشد، همیشه می‌توان منحنی بسته وسادهٔ دیگر $C_۲$را باهمان‌محیط $C_۱$ پیدا کرد، به‌نحوی که مساحت‌بیشتری رامحصورکند.

نتیجهٔ طبیعی این قضیه این است که: اگرمنحنی سادهٔ بسته‌ای به‌طول ثابت و بامساحت ماکزیمم وجود داشته باشد، این‌منحنی، دایره است.

درحالتی‌که ناحیهٔ $R_۱$، که با منحنی $C_۱$ محصور شده است، محدب نباشد، شبیه قضیهٔ a-۲.۴، «قشر محدب» $R_۱$، یعنی کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل $R_۱$ را درنظر می گیریم. اگر مرز این «قشر محدب» را C

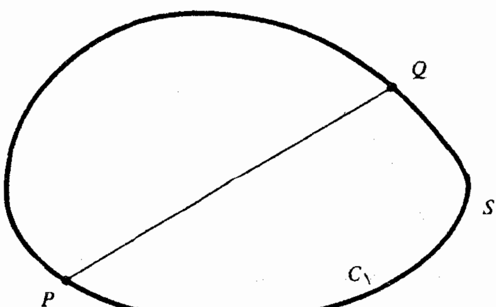


شکل b-۳.۴

فرض کنیم، طول C از طول C_1 کمتر است، درحالی که C، مساحت بیشتری را محصور می کند. سپس، منحنی C_2 را، باطولی برابر C_1، و شبیه C، درنظر می گیریم وغیره. به‌این ترتیب، اثبات قضیه، دراین حالت کامل می شود.

به‌حالت دیگرمی‌پردازیم که، منحنی‌مفروض C_1، ناحیهٔ‌محدبی رامحصور کند. برای‌سادگی کار، طول‌منحنی C_1 را برابر k می گیریم. نقطهٔ‌دلخواهی مثل P را روی C_1 در نظر می گیریم و وسط محیط را Q می‌نامیم (شکل ۳.۴-c). بنابراین، طول کمان PQ، درهریک از دومسیری که روی منحنی از P به Q می‌رود، برابر است با $\frac{k}{2}$. ابتدا فرض کنید، پاره‌خط راست PQ، مساحت داخلی منحنی را به‌دوبخش نابرابر تقسیم کند. دراین‌صورت، بخش بزرگتر را، باقرینهٔ آن نسبت به‌پاره‌خط PQ درنظر می گیریم: روی‌هم، یك منحنی به‌طول k به‌دست می‌آید که ناحیه‌ای را محصور می کند؛ این منحنی را C_2 می‌نامیم. ناحیهٔ محدود به‌منحنی C_2، مساحتی بیشتراز ناحیهٔ محدود به‌منحنی C_1 دارد.

اکنون فرض می کنیم، پاره‌خط راست PQ، ناحیه داخلی سطح‌محدود به C_1 را، به‌دوبخش با مساحت‌های برابر تقسیم کند (شکل ۳.۴-c). چون C_1 یك دایره نیست، بنابراین، دست کم یکی از کمان‌های PQ نیم‌دایره نیست؛ این کمان را PSQ می گیریم. باتوجه به‌قضیهٔ ۳.۴-a، می‌توانیم به‌جای کمان PSQ، کمان دیگری، هم طول با آن قرار دهیم، به‌نحوی که



شکل ۳.۴-c

مساحت محدود به‌آن و خط‌راست PQ، بزرگتر باشد. این منحنی، همراه با قرینهٔ خودش‌نسبت به‌PQ، منحنی سادهٔ بستهٔ C_2 را تشکیل می‌دهدکه‌طولی برابر k دارد، ولی مساحت محدود به‌آن، ازمساحت محدود به‌منحنی C_1 بیشتر است.

اثبات استادانهٔ قضیه‌های ۳.۴-a و ۳.۴-b، متعلق به‌ژاکوب شتینر (Jakob Steiner) استاد دانشگاه برلن است‌که در سال ۱۸۳۶ ارائه داد؛ او با کارهای بسیار جالب و هوشمندانهٔ خود توانست تاحد زیادی دیدگاه نسبت‌به‌هندسه را گسترده‌ترکند. ولی با آن‌که‌شتینر قضیهٔ‌هم‌پیرامونی را ثابت‌کرد، دیریکله روشن‌کردکه هنوز، وجود عملی ماکزیمم ثابت نشده است. درواقع، آن‌چه ثابت‌شده است، این است‌که: اگر مساحت محدود به‌یك منحنی، ماکزیمم داشته باشد، این ماکزیمم متعلق به‌دایره است. تلاش‌های بسیاری شد تا، این شکاف را، دراثبات قضیه، پرکنند؛ ما یکی از این روش‌ها را درفصل دوازدهم، خواهیم آورد. این روش، اثبات ما را کامل می‌کند، ولی هرگز به‌جای اثبات شتینر نمی‌نشیند، بلکه تنها اثبات او را کامل می‌کند.

D.۳۰. پاره‌خط راست AB و ثابت مثبت c، بزرگتراز طول پاره‌خط AB، مفروض‌اند. ثابت‌کنید، از بین همهٔ‌کمان‌های از A به B وبه‌طول c، کمان دایره‌ای، مساحت بیشتری را بین خود و پاره‌خط راست AB محصور می‌کند. [برای‌حل، نه‌تنها کمان دایره‌ای AB را رسم‌کنید، بلکه بقیهٔ‌محیط دایره را هم، درطرف دیگر AB کامل‌کنید.]

۴.۴. نسبت هم‌پیرامونی. قضیه هم‌پیرامونی را می‌توان به‌این‌صورت طرح‌کرد:

برای هرناحیه‌ای ازصفحه، که مساحتی برابر A ومحیطی برابر L داشته باشد، نابرابری زیر برقرار است:

$$4\pi A \leqslant L^2 \quad \text{یا} \quad \frac{4\pi A}{L^2} \leqslant 1 \qquad (1)$$

که درآن، برابری، تنها برای وقتی است که، ناحیهٔ موردنظر، سطح یك دایره باشد.

دلیل مطلب، بسیارساده است: دایرهٔ به‌محیط L، شعاعی برابر $\frac{L}{۲\pi}$ دارد ومساحت آن، برابر است با $\pi\left(\frac{L}{۲\pi}\right)^{۲}=\frac{L^{۲}}{۴\pi}$، چون دایره، بین تمام منحنی‌های به‌طول ثابت، مساحت بیشتری را محصور می‌کند، درنتیجه، مساحت محصور به‌وسیلهٔ هر منحنی دیگری، بایدکمتر از $\frac{L^{۲}}{۴\pi}$ باشد و، به‌این‌ترتیب، نابرابری (۱) به‌دست می‌آید.

نسبت $\frac{۴\pi A}{L^{۲}}$ را، نسبت یا خارج‌قسمت هم‌پیرامونی ناحیه‌ای ازصفحه وعامل ۴π را، عامل نرمال‌کنندهٔ آن گویند. به‌این‌ترتیب، نسبت‌هم‌پیرامونی در دایره برابر واحد و برای هرمنحنی دیگری کوچکتر از واحد است. علاوه براین، رابطهٔ (۱) نشان می‌دهدکه، شکل‌های متشابه، نسبت‌هم‌پیرامونی یکسانی دارند. مثلاً، دو مثلث متشابه، یکی با ضلع‌های به‌طول a،b وc و دیگری باضلع‌های به‌طول a'،b' وc' را درنظر بگیرید. اگر نسبت تشابه را r فرض‌کنیم،داریم: $a=ra'$، $b=rb'$، $c=rc'$. همچنین، برای L و L'، محیط‌های دو مثلث $L=rL'$ و برای A و A'، مساحت‌های دو مثلث: $A=r^{۲}A'$. از برابری‌های $L=rL'$ و $A=r^{۲}A'$، نتیجه می‌شود: $\frac{A}{L^{۲}}=\frac{A'}{L'^{۲}}$، یعنی نسبت هم‌پیرامونی، برای دو مثلث، یکسان است.همین نتیجه را، برای هر دو شکل متشابهی می‌توان به‌دست آورد، زیرا در مورد هر دو شکل متشابه، نسبت طول‌ها برابر نسبت تشابه ونسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است. [مساحت، یك مفهوم دوبعدی است وبرای محاسبهٔ مساحت، اغلب، از حاصل‌ضرب دوبعد استفاده می‌شود.]

به‌عنوان مثال، نسبت هم‌پیرامونی در هر مثلث متساوی‌الاضلاع،

برابراست با $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$ ویا به‌تقریب ۰/۶۰۵. چون حداکثر نسبت‌هم‌پیرامونی برای دایره و برابر واحد است، جالب خواهد بودکه نسبت هم‌پیرامونی را برای برخی شکل‌های دیگر به‌دست آوریم وآن‌ها را باهم مقایسه‌کنیم. در زیر،نسبت هم‌پیرامونی‌برای بعضی شکل‌ها، تاسه‌رقم دهدهی داده شده‌است:

دایره:	۱/۰
هشت‌ضلعی منتظم:	۰/۹۴۸
شش‌ضلعی منتظم:	۰/۹۰۷
پنج‌ضلعی‌منتظم:	۰/۸۶۵
مربع:	۰/۷۸۵
قطاع دایره با زاویهٔ ۲ رادیان:	۰/۷۸۵
قطاع دایره با زاویهٔ ۹۰ درجه:	۰/۷۷۴
مستطیل با بعدهای ۳ و ۲:	۰/۷۵۴
نیم‌دایره:	۰/۷۴۷
مستطیل با بعدهای ۲ و ۱:	۰/۶۹۸
مثلث متساوی‌الاضلاع:	۰/۶۰۵
مستطیل با بعدهای ۳ و ۱:	۰/۵۸۹
مثلث قائم‌الزاویهٔ‌متساوی‌الساقین:	۰/۵۳۹
مثلث با ضلع‌های ۱ و ۲ و $\sqrt{۳}$:	۰/۴۸۶

قطاع، بخشی‌ازسطح‌دایره است‌که بین‌دوشعاع دایره واقع باشد.قطاع با زاویهٔ ۹۰ درجه، برابر ربع‌دایره است. قطاع با زاویهٔ ۲ رادیان، ویژگی خاصی داردکه دریکی ازمساله‌های پایان این‌بخش آمده است. نسبت هم‌پیرامونی درقطاع با زاویهٔ ۲ رادیان، برابر نسبت هم‌پیرامونی در مربع است؛ درهردوحالت، مقدار دقیق این‌نسبت، برابر است با $\frac{\pi}{۴}$.

درجدول بالا، چندضلعی‌های منتظم باتعداد ضلع‌های ۳، ۴، ۵، ۶و۸ را آورده‌ایم. به‌طورطبیعی، بایـد انتظار داشت که، نسبت هم‌پیرامونی، در $(n+1)$ ضلعی منتظم، بزرگتر ازنسبت هم‌پیرامونی در nضلعی منتظم‌باشد. دراین‌باره، درفصل بعد صحبت کرده‌ایم.

D.۴۰. قطاعی ازیك دایره را درنظر بگیریدکه زاویهٔ بین دوشعاع آن برابر θ باشد. θ را چقدر بگیریم تا نسبت هم‌پیرامونی، آن ماکزیمم شود؟ [اگر θ برحسب رادیـان و شعاع دایره برابر r بـاشد، محیط قطـاع برابر $2r+r\theta$ و مساحت آن برابر $\frac{1}{2}r^2\theta$ می‌شود.]

D.۵۰. تحقیق کنید، نسبت هم‌پیرامونی در مـربع، برابر است بانسبت هم‌پیرامونی درقطاعی با زاویهٔ ۲ رادیان.

D.۶۰. I. آیا متوازی‌الاضـلاعی مثل $ABCD$ وجود داردکـه دارای همان نسبت هم‌پیرامونی مثلث ABC باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، همهٔ این متوازی‌الاضلاع‌ها را مشخص کنید. II. آیـا مستطیلی با این ویژگی وجود دارد ؟

۴.۵. وجود و منحصربه‌فـردبودن. خیلی از مسالـه‌های این کتاب را می‌توان بـه‌سادگی مورد مطـالعه قرار داد، بـه‌شرطی‌که وجـود جواب یا عنصرهای دیگری از مساله را، مفروض گـرفته باشیم. برای درك بهتر این مطلب، اثبات ساده‌ای را، برای نابرابری واسطه‌هـای حسابی وهندسی ـ که درفصل دوم آمده است ـ می‌آوریم.

عدد مثبت وثابت c وعدد درست $n>1$ مفروض‌اند. چند مجموعه از عددهای درست x_1، x_2، ...، x_n وجـود داردکـه مجموعی برابر c دارند. فرض‌می‌کنیم، ازبین‌این‌مجموعه‌ها، مجموعه‌ای‌مانند a_1، a_2، ...، a_nوجود داشته باشدکه حاصل‌ضرب‌عضوهای آن ماکزیمم باشد؛ خیلی ساده‌می‌توانیم ثابت کنیم که،دراین‌صورت،این‌عددهاباهم‌برابرند. ازبرهان‌خلف‌استفاده‌می‌کنیم وفرض می‌کنیم که دربین عضوهای مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، دوعضو

نابرابر وجود داشته باشد، مثلاً $a_i \neq a_j$ به‌جای هر یك از دو مقدار a_i و a_j، مقدار $\frac{a_i+a_j}{2}$ را قرار می‌دهیم و بقیهٔ aها را بی‌تغییر نگه می‌داریم. دراین‌صورت، بامجموعهٔ تازه‌ای سروکار پیدا می‌کنیم که مجموع عضوهای آن همان c است، ولی حاصل‌ضربی بزرگتر دارد، زیرا $\frac{(a_i+a_j)^2}{4} > a_i a_j$، که برخلاف فرض است. این تناقض ثابت می‌کند که $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$، واسطهٔ حسابی این‌عددها، یعنی $\frac{c}{n}$، برابر است بـا واسطهٔ هندسی آن‌ها. هر مجموعهٔ دیگری ازعـددهـای مثبت x_1، x_2،...، x_n، که مجموعی برابر c داشته باشد، دارای حاصل‌ضـرب کمتری است و، بنابراین، واسطـهٔ هندسی کمتری دارد، یعنی نابرابری

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > (x_1 . x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

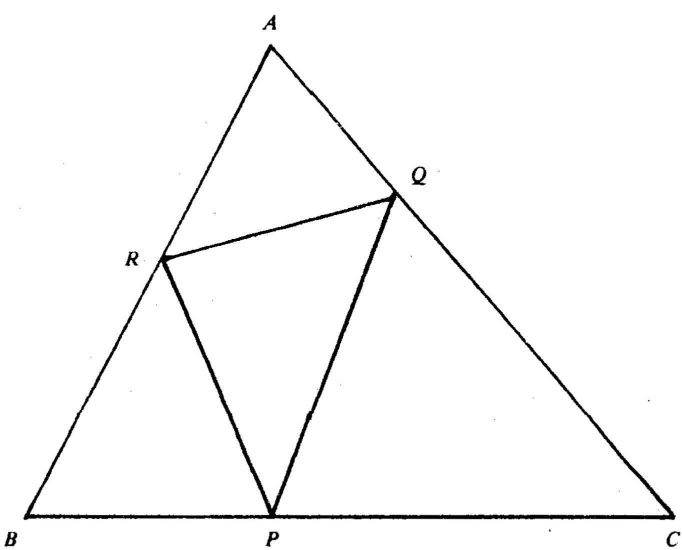
برای هرمجموعه‌ای از عددهای مثبت x_1، x_2،...، x_n، بامجموع ثابت c، برقرار است، به‌جز مجموعهٔ خاصی که عضوهای آن باهم برابر باشند.

[این‌اثبات، ازمقاله‌ای زیرعنوان‌مسالههای نهائی برداشته شده‌است. نویسندهٔ مقاله، ازفرض وجود استفاده می‌کند: این‌فرض کـه مجموعهٔ شامل a_1، a_2،...، a_n، مجموعـه‌ای دارای بـزرگترین حاصل‌ضرب است. بدون این پیش‌فرض بسیار نیرومند، چنین اثباتـی ممکن نبود. اثـبات مشابهی در کتاب کوراُنت و روبین چاپ سال ۱۹۴۷ آمده است که بافرض بسیار روشن «وجود» تجزیه وتحلیل شده است.]

به‌عنوان نمونهٔ دوم، قضیهٔ ۳.۳-b را درنظر می‌گیریم: از بین همهٔ چهارضلعی‌های بـا محیط ثابت، مساحت حداکثر متعلق به مربع است. اگر فرض کنیم، چهارضلعی با مساحت ماکزیمم وجود دارد، دراین‌صورت، باید هر دوضلع مجاور چنین چهارضلعی با هم برابر باشند (بنابه‌قضیهٔ ۲.۳-b)، یعنی‌هرچهارضلع باهم‌برابرند،واین، بسیارساده است که‌با استدلال نشان‌دهیم

که زاویه‌های داخلی این چهارضلعی باید برابر ۹۰ درجه باشد، تا شکل دارای مساحت ماکزیمم شود، یعنی چهارضلعی با مساحت ماکزیمم، مربع است.

این شیوهٔ استدلال، ازنظر منطقی، کامل و درست است، به‌شرطی که، ازپیش، فرض کرده باشیم که مساله، جواب دارد. برای نمونه، این مساله‌را درنظر بگیرید: مثلث ABC را مفروض می‌گیریم؛ مثلث PQR را مشخص کنید که درمثلث ABC محاط شده و کمترین محیط را داشته باشد. فرض می‌کنیم، مثلث بامحیط می‌نیمم را پیدا کرده باشیم (شکل ۵.۴-a). این مثلث را PQR می‌نامیم و ویژگی‌های آن را جست‌وجو می‌کنیم. اگر نقطه‌های Q و R را، برای لحظه‌ای، ثابت نگه‌داریم، باید نقطهٔ P راروی ضلع BC طوری انتخاب کرد که مجموع $RP+QP$ می‌نیمم باشد. این مساله را در ۵.۳ مورد بحث قرار دادیم و روشن کردیم که نقطهٔ P بایدچنان باشد که داشته باشیم: $\widehat{RPB}=\widehat{QPC}$. به‌همین‌ترتیب: $\widehat{RQA}=\widehat{PQC}$ و



شکل ۵.۴-a

$\widehat{QRA}=\widehat{PRB}$. بنابراین، مثلث محاطی PQR وقتی دارای محیط حداقل است که، ضلع‌های آن، با هرضلع مثلث ABC زاویه‌های برابر بسازد.

اگـرچه، ظاهراً، جواب مساله را پیدا کـردیم، ولی در واقع، تنها وقتی که مثلث ABC، زاویه‌های حـاده داشته باشد، می‌توان مثلث PQR را باچنین ویژگی پیدا کرد که ضلع‌های آن، با هرضلع مثلث ABC، زاویه‌هایی برابر بسازد. [درفصل نهم، این مساله را به‌تفصیل موردبحث قرارداده‌ایم و راه‌حل دیگری، غیر ازآن‌چه دراین‌جـا دیدید، برای آن آورده‌ایـم. درآن راه‌حل، روشی دنبال شده است که ما را قـادر می‌سازد تـا مثلث PQR را، درصورت وجود، به‌طور عملی رسم کنیم.] علاوه‌براین، به‌فرض وجودمثلث PQR، هنوز کمبود دیگری‌هم وجود دارد. ازکجا معلوم است که این‌مثلث، منحصر به‌فرد است؟ درواقع، باید ثابت کنیم که، به‌فرض وجود، مثلثPQR منحصر به‌فرد است، ولی اثباتی که دراین‌جا آوردیم، برای این نتیجه گیری کافی نیست.

در ۲.۴ و ۳.۴، از روشی برای استدلال استفاده کردیم، که به‌طور خلاصه به‌این‌ترتیب بود: اگر در همهٔ حـالت‌ها بتوان نوع بزرگتر را پیدا کرد، به‌جز یك‌حالت؛ این حالت استثنائی، بزرگترین است. ولی آیا همیشه، حالت استثنائی، بزرگترین است؟ به‌این مساله‌ها توجه کنید:

مجموعهٔ عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴،... را درنظر می گیریم. برای هرعدد a ازمجموعه، عدد بزرگتری‌مانند $a^۲$ وجود دارد، به‌جز یك‌استثناء. این‌حالت استثنا، برای $a=۱$ ظـاهر می‌شود. تنها عدد واحـد است که، در مـورد آن، $a^۲$ بـزرگتر نیست و این خیلی سخت است کـه بپذیریـم، ۱، بزرگترین عدد طبیعی است؛ برای عددهای طبیعی، بزرگترین وجود ندارد.

مساله C.۱۰، به‌مسالـه‌ای پرداخته است که جواب نـدارد. یکی‌از مساله‌های‌مشهورمربوط به‌این‌پدیده،مسالهٔ‌کاکه‌یا (Kakeya) است: ازبین همهٔ ناحیه‌های R یك‌صفحه، با این‌ویژگی که، دوران پاره‌خط به‌طول واحد را، به‌اندازهٔ ۳۶۰ درجه، در R نگه دارد، حـداقل مساحت مربوط به کدام

ناحیه است؟ ناحیهٔ دایره‌ای، یعنی دایره‌ای به‌قطر ۱، با ناحیهٔ داخلی آن، مثالی‌ازاین نمونه است. آ.س. بسیکوویچ (A.S.Besicovitch) ثابت کرد که ناحیه‌ای با حداقل‌مساحت وجود ندارد: اگر عدد مثبت دلخواه βرا انتخاب کنیم (کار به‌این نداریم که β چقدر کوچك است)، می‌توان ناحیه‌ای باهمین ویژگی پیدا کرد که مساحت آن، کمتر از β باشد.

مسالهٔ مربوط به‌وجود جواب را، در کتاب‌های جدی‌تر، درحالت‌های مختلف و با توجه به«فشردگی» مجموعه مورد بررسی قرار می‌دهند. مثلاً، nضلعی‌ها را می‌توان برحسب مختصات راس‌های آن شرح داد. هر راس، درصفحه، دومختص x و y دارد، یعنی روی هم $2n$ مختص وجود دارد و آن‌ها را می‌توان درمجموعهٔ فشرده‌ای ازنقطه‌ها، درفضای $2n$ بعدی‌محدود کرد و از این‌راه، به‌وجود nضلعی با مساحت ماکزیمم، وقتی‌که محیط آن معلوم باشد، مطمئن شد. این‌نتیجه، ازحکم کلی زیر به‌دست می‌آیدکه: تابع پیوستهٔ بامقدار حقیقی f، که در زیرمجموعهٔ غیرتهی R^n تعریف شده باشد، کران‌دار است وماکزیمم و می‌نیمم دارد، یعنی، این‌تابع، دارای کوچکترین کران‌بالا وبزرگترین کران‌پایین است. فضای R^n، عبارت است ازحاصل‌ضرب مستقیم فضای $R\times R\times\ldots\times R$ عددهای حقیقی است (که n بار در خودش ضرب شده است). چون، هر مجموعهٔ کران‌دار در R^n، فشرده است، می‌توان این‌نتیجه را، برای تابع‌های پیوستهٔ حقیقی (که بسته‌باشند) و زیر-مجموعه‌های کران‌دار، توضیح داد؛ وجود nضلعی‌های با مساحت ماکزیمم، دربین nضلعی‌های بامحیط ثابت هم، ازهمین‌راه ثابت می‌شود. ولی‌این گونه بحث‌ها، ازمحدودهٔ طرحی‌که برای‌این کتاب ریخته‌ایم، خارج است‌دراین‌جا، تنها به‌این‌خاطر، این ملاحظه‌ها را آوردیم‌که خواننده بتواند متوجه مسیر کارخود، درصورتی‌که مایل به‌دنبال‌کردن آن باشد، بشود.

مسالهٔ منحصربودن جواب، پیچیدگی کمتری دارد. مساله این است: اگر جوابی وجود دارد، آیا ممکن است جواب‌های متعددی داشته باشیم؟ همان‌طورکه انتظار می‌رود، پاسخ به‌این‌پرسش مثبت است. یکی‌ازمساله‌های متعارف این است‌که: ازبین چهارضلعی‌ها، مستطیل دارای مساحت ماکزیمم

است. مثلاً، درکتاب‌های مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال، ثابت می‌شودکه ازبین چهارضلعی‌های محاط در یک بیضی، مستطیلی‌که ضلع‌هایی موازی با محورهای بیضی داشته باشد، دارای حداکثر مساحت است. ولی دراین‌جا، و درمثال‌های مشابه‌آن، باید روشن‌کرد: آیامساله تنها یک‌جواب دارد یا جواب‌های دیگری هم پیدا می‌شود؟

فصل پنجم

نابرابری‌های اساسی در مثلثات

۱۰.۵. مسیر *تازه*. دراین فصل وفصل بعد، مسیری را انتخاب کرده‌ایم که با آن‌چه تا این‌جا گفته‌ایم، کم و بیش متفاوت است. هدف اصلی، محاسبهٔ چندضلعی‌های با مساحت ومحیط ماکزیمم است که می‌توان آن‌ها را در دایره‌ای محاط یا بر دایره‌ای محیط کرد. این، موضوع فصل ششم کتاب است و درفصل هفتم، به‌مساله‌های مشابهی دربارهٔ بیضی پرداخته‌ایم. یکی از ساده‌ترین راه‌های ورود به‌این مساله‌ها، استفاده ازمجموع‌های مثلثاتی است که، به‌طور طبیعی به‌زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به‌ضلع‌های چند ضلعی‌های محاطی یا محیطی مربوط می‌شوند.

نابرابری‌های مثلثاتی که‌دراین‌جا آورده‌ایم، حالت‌های خاصی از نابرابری ین‌سن (Jensen) هستند. خود نابرابری ین‌سن در ۳.۵ آمده است و در ۴.۵، کاربردهای آن‌را شرح داده‌ایم. مساله‌هایی که درپایان ۴.۵ آورده‌ایم، می‌تواند قدرت کاربرد این نابرابری را نشان دهد. اغلب، مساله‌های مختلفی ازماکزیمم ومی‌نیمم، دربارهٔ مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌های تابع‌های مثلثاتی، برای زاویه‌های مثلث، در مجله‌های ریاضی (که در آشنا کردن مردم با ریاضیات، نقشی اساسی دارند) مطرح می‌شود؛ نابرابری‌های ین‌سن، نمونهٔ خوبی ازیگانگی ریاضیات است ونشان می‌دهدکه: چگونه می‌توان بسیاری از مساله‌های مختلف را با یك روش کلی حل کرد.

ین‌سن(J.L.W.V.Jensen) (۱۹۲۵-۱۸۵۴)، که بحث ما دراین فصل برگرد نام او دور می‌زند، مهندس و رئیس هیات مدیرهٔ تلفن دانمارك بود. ین‌سن (که عضو فرهنگستان علوم هم بود)، قهرمان مطالعه وپژوهش درمورد تابع‌های محدب است.

۲.۵. بعضی نابرابری‌های مثلثاتی. استدلال‌های این بخش، براساس نتیجه‌های ساده‌ای است که از تابع‌های مثلثاتی به‌دست می‌آیند.

قضیهٔ ۲.۵–a. α و β دو زاویه‌اند با شرط $0 \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ و $0 \leqslant \beta \leqslant 180^\circ$ ثابت کنید

$$\sin\alpha + \sin\beta \leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

علامت برابری، تنها درحالت $\alpha=\beta$ برقرار است.

برای اثبات، از اتحاد $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ استفاده می‌کنیم. $\alpha-\beta$ بین $180-$ درجه و 180 درجه واقع است و، بنابراین، $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ مقداری غیرمنفی و وقتی به ماکزیمم خود، ۱، می‌رسد که داشته باشیم، $\alpha=\beta$. و این قضیه را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۲.۵–b. α_1، α_2، ...، α_n را زاویه‌هایی می‌گیریم با شرط $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 180^\circ$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. ثابت کنید:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant 2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} \qquad (1)$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$.

روشن است که درحالت برابری همهٔ α_jها، نابرابری (۱) به‌برابری تبدیل می‌شود. بنابراین، فرض را براین می‌گیریم که، دست‌کم، دو زاویه از α_jها باهم برابر نباشند وثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، نابرابری (۱)، به‌صورت اکید خود برقراراست. اثبات را با روش استقرای ریاضی‌می‌دهیم، شبیه اثباتی‌که‌کوشی برای نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی آورده بود [۵.۲ را ببینید].

نابرابری (۱) را P_n می‌نامیم. بنابرقضیه ۲.۵–a، P_2 برقرار است. اثبات درستی P_n را، برای $n \geqslant 3$، به‌دوبخش تقسیم می‌کنیم:

اول. اگر P_n برای هر عدد ۳ $\leqslant n$ برقرار باشد، آن‌گاه برای P_{n-1} هم برقرار است؛

دوم. درستی P_n برای هرعدد ۲ $\leqslant n$، به‌معنای درستی P_{2n} است.

به‌اثبات بخش اول می‌پردازیم. فرض می‌کنیم، P_n گزاره‌ای درست باشد و ثابت می‌کنیم، دراین‌صورت، P_{n-1} هم درست است. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ را $(n-1)$ زاویه‌ای می‌گیریم که، دست‌کم، دو تا از آن‌ها باهم نابرابر باشند وفرض می‌کنیم:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1} \qquad (2)$$

توجه می‌کنیم که $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \dfrac{n(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})}{n-1}$ وبنا براین

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n}{n} = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1} = \alpha_n$$

با استفاده از درستی P_n، برای این n زاویه، نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{n-1} + \sin\alpha_n < n\sin\alpha_n$$

و اگر به‌جای α_n، مقدار آن را از رابطهٔ (۲) قرار دهیم، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{n-1} < (n-1)\sin\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1}$$

و این، همان P_{n-1} است که درستی آن ثابت شد.

اکنون به‌اثبات بخش دوم می‌پردازیم. P_n را گزاره‌ای درست می‌گیریم وثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، P_{2n} هم درست است. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ را زاویه‌هایی فرض می‌کنیم که همه باهم برابر نباشند و درضمن $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 180^\circ$، باید ثابت کنیم:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{2n} < 2n \cdot \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n}}{2n} \qquad (3)$$

مثلا باشرط $\alpha_1 \neq \alpha_2$، گزارهٔ P_n را ابتدا برای زاویه‌های α_1، α_2، ...، α_n و، سپس، برای زاویه‌های α_{n+1}، α_{n+2}، ...، α_{2n} می‌نویسیم:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n < n.\sin\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} \qquad (۴)$$

$$\sin\alpha_{n+1} + \sin\alpha_{n+2} + \ldots + \sin\alpha_{2n} \leqslant n\sin\frac{\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{2n}}{n} \qquad (۵)$$

(چون تنها شرط کرده بودیم: $\alpha_1 \neq \alpha_2$، بنابراین نابرابری (۵) یك نابرابری اکید نیست، زیرا ممکن است همهٔ زاویه‌های α_{n+1}،...،a_{2n} با هم برابر باشند). α و β را به‌این‌ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}, \qquad \beta = \frac{\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{2n}}{n}$$

بنابراین: $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 180^\circ$ و $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n}}{2n}$. دو نابرابری (۴) و (۵) را باهم جمع می‌کنیم:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{2n} < n(\sin\alpha + \sin\beta)$$

ولی $\sin\alpha + \sin\beta \leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ و به‌سادگی به‌نابرابری (۳) می‌رسیم.

مثال. اگر α، β و γ زاویه‌های یك مثلث باشند، کمترین و بیشترین مقدار عبارت $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ چقدر است؟

با استفادهٔ مستقیم ازقضیهٔ b-۲.۵ به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (۶)$$

به‌این‌ترتیب، حداکثر مقدارعبارت مفروض، برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ است؛ درضمن، در نابرابری (۶)علامت برابری‌تنها برای مثلث متساوی‌الاضلاع پیش می‌آید. ازطرف دیگر، به‌سادگی روشن‌می‌شود که، این عبارت، می‌نیمم ندارد.

در واقع، $sin\alpha$، $sin\beta$ و $sin\gamma$ برای هرمثلث، مقدارهایی مثبت‌اند ومجموع آن‌ها را می‌توان، تا حد دلخواه، کوچک کرد. اگر α و β را به‌قدر کافی کوچک بگیریم (نزدیك به صفر)، مقدار γ به ۱۸۰ درجه نزدیك می‌شود؛ هرچه α و β به‌صفر نزدیك‌تر باشند، γ به ۱۸۰ درجه نزدیك‌تر است و، در نتیجه، مقدار $sin\alpha+sin\beta+sin\gamma$ را می‌توان، تاحد دلخواه کوچك کرد؛ این مجموع، دارای کران پایین است (صفر)، ولی حداقل ندارد.

از نابرابری (۶)، نتیجه‌های دیگری هم می‌توان به دست آورد. از رابطهٔ $A=\frac{۱}{۲}bc\,sin\alpha$ و رابطه‌های نظیر آن، برای مساحت مثلث (A)، نتیجه می‌شود:

$$sin\alpha=\frac{۲A}{bc}, \quad sin\beta=\frac{۲A}{ac}, \quad sin\gamma=\frac{۲A}{ab}$$

که اگر در نابرابری (۶) قراردهیم، بعداز تبدیل‌های لازم، به‌دست‌می‌آید:

$$A\leqslant\frac{۳\sqrt{۳}abc}{۴(a+b+c)}$$

و اگر از رابطهٔ هرون، که مساحت مثلث را برحسب ضلع‌های آن می‌دهد، استفاده کنیم، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$s(s-a)(s-b)(s-c)\leqslant\frac{۲۷(abc)^۲}{۱۶(a+b+c)^۲}$$

که‌اگر دوطرف این نابرابری را در $۱۶(a+b+c)^۲$ ضرب کنیم و به‌جای s، مقدار آن $\frac{a+b+c}{۲}$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(a+b+c)^۳(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant ۲۷(abc)^۲$$

ولی بنابر نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی $۲۷abc\leqslant(a+b+c)^۳$. بنابراین، اگر به‌جای $(a+b+c)^۳$، درسمت‌چپ نابرابری بالا، مقدار کمتر

از آن، یعنی $۲۷abc$ را قرار دهیم، بعدازساده‌کردن به‌این نابرابری‌می‌رسیم:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant abc \qquad (۷)$$

این نابرابری، برای ضلع‌های هرمثلث برقرار است، اگرچه درحالتی هم که a و b و c عددهایی مثبت باشند، (ولو این که نتوانند ضلع‌های یک‌مثلث باشند)، برقراراست. مثلاً، سمت چپ نابرابری (۷)، برای $a=۲$، $b=۵$ و $c=۸$،مقداری‌منفی می‌شود و، بنابراین، نابرابری برقرار است،نابرابری (۷)، برای همهٔ عددهای مثبت a و b و c درست است و علامت برابری وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم: $a=b=c$.

البته به‌جاست که شبیه قضیه‌های ۲.۵-a و ۲.۵-b را برای سایر تابع‌های مثلثاتی پیدا کنیم؛ ولی‌نیازی به‌بحث تفصیلی نداریم، زیرا اندیشهٔ اثبات قضیهٔ ۲.۵-b را می‌توان در حالت کلی، و بدون این‌که برای حالت خاصی درنظر بگیریم، به‌کاربرد و، سپس، حالت‌های خاص را، ازحالت‌کلی نتیجه‌گرفت. این تعمیم، موضوع بحث بخش بعدی است.

۳.۵. نابرابری‌های ین‌سن. نابرابری‌مثلثاتی‌قضیهٔ ۲.۵-b رامی‌توان درقالب قضیهٔ‌کلی زیر طرح‌کرد:

قضیهٔ ۳.۵-a. (قضیهٔ ین‌سن). فرض‌کنید، تابع $f(x)$، برای هر دو مقدار α و β از دامنهٔ تعریف تابع، با این نابرابری سازگار باشد:

$$f(\alpha)+f(\beta)\leqslant ۲f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right) \qquad (۱)$$

(دامنهٔ تعریف تابع، بازه‌ای ازمحور عددهای حقیقی است)؛ درضمن فرض کنید، علامت برابری تنها برای $\alpha=\beta$ برقرار باشد. ثابت‌کنیدکه، دراین‌صورت، برای مجموعهٔ عددهای حقیقی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n از دامنهٔ تعریف تابع داریم:

$$f(\alpha_۱)+f(\alpha_۲)+\ldots+f(\alpha_n)\leqslant nf\left(\frac{\alpha+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n}{n}\right) \qquad (۲)$$

که علامت برابری، تنها برای حالت برابری همهٔ α_iها پیش می‌آید. علاوه بر این می‌توان نتیجهٔ مشابهی را، برای حالتی که نابرابری‌های (۱) و (۲) در جهت عکس باشند، به‌دست آورد.

این قضیه را، کاملاً شبیه قضیهٔ a-۲.۵ می‌توان ثابت کرد، تنها باید تابع سینوس را ـ هرجا که آمده است ـ با تابع f عوض کرد. درحالتی هم که جهت نابرابری‌ها عوض شده باشد، با همان شیوه می‌توان جلو رفت. بنابراین، از بحث اضافی خودداری می‌کنیم و تکرار استدلال را، به‌عنوان تمرین، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

تابع را محدب گوییم، وقتی که برای هر دو مقدار α و β از دامنهٔ تابع داشته باشیم: $f(\alpha)+f(\beta)\leqslant ۲f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$. باتوجه به‌این‌تعریف، قضیه a-۳.۵ را، نابرابری ین‌سن دربارهٔ تابع‌های محدب گویند. به‌سادگی می‌توان قضیهٔ مربوط به‌ضرب تابع‌ها را هم تنظیم کرد:

قضیهٔ b-۳.۵. فرض کنید تابع $f(x)$، برای هر دومقدار α و β از دامنهٔ تعریف تابع، با این نابرابری سازگار باشد:

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)\geqslant\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)\right]^{۲} \qquad (۳)$$

وعلامت‌برابری، تنها برای $\alpha=\beta$ برقرار باشد. همچنین، دامنهٔ تعریف‌تابع را، بازه‌ای از عددهای مثبت روی محور عددهای حقیقی فرض کنید. دراین‌صورت داریم:

$$f(\alpha_۱)\cdot f(\alpha_۲)\dots f(\alpha_n)\geqslant\left[f\left(\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots\alpha_n}{n}\right)\right]^{n} \qquad (۴)$$

که‌علامت برابری، تنها برای موردی است که همهٔ α_iها باهم برابر باشند. شبیه این‌نتیجه را، برای حالتی هم که جهت‌نابرابری‌ها در (۳) و (۴) عوض شوند، می‌توان به‌دست آورد.

ما به‌نتیجهٔ این قضیه، برای $n=۳$ نیاز داریم، به‌همین مناسبت، آن

را برای این‌حالت و درضمن، حالت $n=۴$ محدود می‌کنیم. α،β،γوδ را، چهارعدد از دامنهٔ تعریف تابع f می‌گیریم. روشن است که اگر هر چهار عدد باهم برابر باشند، نابرابری

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta)\geqslant\left[f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{۴}\right)\right]^{۴} \qquad (۵)$$

به‌برابری تبدیل می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم، مثلاً $\alpha\neq\beta$. دراین‌صورت، (۳) یك نابرابری اکید است؛ اگر دوطرف آن را در

$$f(\gamma).f(\delta)\geqslant\left[f\left(\frac{\gamma+\delta}{۲}\right)\right]^{۲} \qquad (۶)$$

ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta)>\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right).f\left(\frac{\gamma+\delta}{۲}\right)\right]^{۲}$$

اکنون، اگر نابرابری (۳) را، برای ضرب داخل کروشه، درسمت راست نابرابری اخیر، بنویسیم، به‌همان نابرابری (۵)، درحالت اکید خود، می‌رسیم. قضیه، برای $n=۴$ ثابت شد.

برای حالت $n=۳$، سه‌مقدار α،βوγ را از دامنهٔ تعریف تابع f درنظر می‌گیریم. حالت $\alpha=\beta=\gamma$ را، که به‌نتیجه روشنی منجر می‌شود، کنار می‌گذاریم وثابت می‌کنیم که دراین‌صورت

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma)\geqslant\left[f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}\right)\right]^{۳} \qquad (۷)$$

واسطهٔ حسابی α،βوγ را δ می‌نامیم: $\delta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{۴}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}}{۴}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}$$

اگر ازنابرابری اکید (۵) استفاده کنیم، داریم:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}\right)>\left[f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}\right)\right]^{۴}$$

که باتقسیم دوطرف آن بر $f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}\right)$، به‌همان نابرابری (۷)، به‌صورت اکید خود، می‌رسیم.

اثبات دوم. اثبات دوم را برمبنای ویژگی‌های لگاریتم‌ها می‌دهیم. اگر از دوطرف نابرابری (۳) لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\log f(\alpha)+\log f(\beta)\geqslant ۲\log f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

اکنون، اگر ازقضیهٔ a-۳.۵، برای تابع $\log f$ استفاده کنیم، نتیجه‌می‌شود:

$$\log f(\alpha_۱)+\log f(\alpha_۲)+\ldots+$$
$$+\log f(\alpha_n)\geqslant n\log f\left(\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n}{n}\right)$$

که در واقع، لگاریتم همان نابرابری حکم قضیهٔ b-۳.۵ است.

حالت‌های خاص این قضیه، به‌خصوص در مورد تابع‌های مثلثاتی، اهمیت زیادی دارد. مثلاً، نابرابری

$$\sin\alpha.\sin\beta\leqslant \sin^{۲}\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (۸)$$

برای زاویه‌های بین ۰ و ۱۸۰ درجه برقرار است؛ درضمن، علامت‌برابری، برای حالت $\alpha=\beta$ پیش می‌آید [اثبات این نابرابری را در مسالهٔ E.۱، به‌عنوان تمرین، در پایان این‌بخش به‌عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم]. نابرابری (۸)، همان‌فرض(۳) درقضیهٔ b-۳.۵ است (البته، باتغییر جهت نابرابری)، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که، برای زاویه‌های α و β و γ، به‌شرطی که بین ۰ و ۱۸۰ درجه باشند، داریم:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\sin^{3}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \qquad (۹)$$

وعلامت برابری تنها وقتی است که داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma$.

روشن است که همین نتیجه را، برای تعداد بیشتری از سینوس‌ها هم می‌توان به‌دست آورد. درحالتی که α و β و γ زاویه‌هایی حاده باشند، نابرابری (۹) را برای کسینوس‌های سه‌زاویهٔ α و β و γ هم‌می‌توان‌نوشت.

وقتی که باتانژانت‌ها سروکارداشته باشیم، برای‌زاویه‌های حادهٔ αوβ، با شرط $\alpha+\beta<90^\circ$ داریم:

$$tg\alpha\, tg\beta<tg^{2}\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (۱۰)$$

درحالت $\alpha+\beta>90^\circ$، نابرابری (۱۰) جهت عوض می‌کند و در حالت $\alpha+\beta=90^\circ$ به‌برابری تبدیل می‌شود. [تمرین E.۶ و، برای برخی نتیجه گیری‌ها درمثلث، تمرین E.۷ را ببینید.]

۴.۵. تابع مثلثاتی دیگر. دراین فصل، ابتدا نابرابری اساسی را برای تابع سینوس ثابت کردیم، سپس به‌سراغ نتیجه‌های مشابهی برای سایر تابع‌های مثلثاتی رفتیم و، سرانجام، نابرابری ین‌سن را به‌کارگرفتیم تا نابرابری‌های کلی‌تری به‌دست آوریم.

می‌دانیم: $\sin\alpha+\sin\beta\leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. اکنون، نابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وتوافقی، یعنی

$$a+b\geqslant\frac{4ab}{a+b}$$

را درنظر می‌گیریم [مسالهٔ B.۴ را ببینید]، که برای حالت $a=b$ برقرار است. دراین نابرابری، به‌جای a و b، به‌ترتیب، $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را قرارمی‌دهیم. بنابراین، اگر α و β، زاویه‌هایی بین ۰ و ۱۸۰ درجه باشند، داریم:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant \sin\alpha+\sin\beta\geqslant\frac{4\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\qquad(1)$$

عبارت وسط، یعنی $\sin\alpha+\sin\beta$ را کنار می‌گذاریم، ازنابرابری حاصل، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}\beta\geqslant 2\operatorname{cosec}\frac{\alpha+\beta}{2}\qquad(2)$$

که برابری، تنها برای $\alpha=\beta$ برقراراست($0<\alpha<180^\circ$ و $0<\beta<180^\circ$؛ زیرا $\operatorname{cosec}0^\circ$ و $\operatorname{cosec}180^\circ$ بی‌معنی است.

اگر درنابرابری $\sin\alpha+\sin\beta\leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$، α و β را، به‌ترتیب، به $90^\circ-\alpha$ و $90^\circ-\beta$ تبدیل کنیم، به‌نابرابری

$$\cos\alpha+\cos\beta\leqslant 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\qquad(3)$$

می‌رسیم که برای $-90^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$ و $-90^\circ\leqslant\beta\leqslant 90^\circ$ برقرار است وعلامت برابری تنها وقتی پیش‌می‌آید که داشته باشیم: $\alpha=\beta$. توجه کنیم، شرط $0\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ$ دراین‌جا، به‌شرط $0\leqslant 90^\circ-\alpha\leqslant 180^\circ$، یعنی $-90^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$ تبدیل می‌شود و، به‌این‌ترتیب، نابرابری (۳) برای زاویه‌های حادهٔ α و β (مثبت یا منفی) برقرار است.

به‌همین‌ترتیب، باتبدیل α و β به $90^\circ-\alpha$ و $90^\circ-\beta$ درنابرابری (۲)، به‌دست می‌آید:

$$\sec\alpha+\sec\beta\geqslant 2\sec\frac{\alpha+\beta}{2}\qquad(4)$$

برای $-90^\circ<\alpha<90^\circ$ و $-90^\circ<\beta<90^\circ$؛ وعلامت برابری تنها برای $\alpha=\beta$ برقرار است.

به‌تابع‌های تانژانت وکتانژانت بپردازیم. ثابت می‌کنیم نابرابری

$$tg\alpha+tg\beta\geqslant ۲tg\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (۵)$$

برای $۰\leqslant\alpha,\beta<۹۰^\circ$ برقرار است (علامت برابری، برای $\alpha=\beta$).

روشن است که نابرابری (۵)، به‌ازای $\alpha=\beta$، به برابری تبدیل می‌شود. بنابراین، فرض می‌کنیم $\alpha\neq\beta$، $\alpha>\beta$ می‌گیریم و نابرابری را به‌صورت اکید خود ثابت می‌کنیم. $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{۲}$ می‌گیریم، یعنی $\alpha-\gamma=\gamma-\beta$.

بنابراین $sin(\alpha-\gamma)=sin(\gamma-\beta)$ و

$$sin\alpha cos\gamma-sin\gamma cos\alpha=sin\gamma cos\beta-sin\beta cos\gamma \qquad (۶)$$

باتوجه به‌فرض $\alpha>\beta$ داریم: $cos\alpha<cos\beta$ وبنابراین

$$(cos\alpha cos\gamma)^{-۱}>(cos\beta cos\gamma)^{-۱} \qquad (۷)$$

اکنون، باضرب (۶) و (۷) دریکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$tg\alpha-tg\gamma>tg\gamma-tg\beta \Rightarrow tg\alpha+tg\beta>۲tg\gamma$$

که همان نابرابری (۵) به‌صورت اکید است.

اگر درنابرابری (۵)، α و β را به‌ترتیب، به $۹۰^\circ-\alpha$ و $۹۰^\circ-\beta$ تبدیل کنیم، نابرابری زیر برای $۰<\alpha\leqslant۹۰^\circ$ و $۰<\beta\leqslant۹۰^\circ$ به‌دست می‌آید:

$$cotg\alpha+cotg\beta\geqslant ۲cotg\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (۸)$$

که علامت برابری، تنها برای $\alpha=\beta$ برقرار است.

این نابرابری‌ها، زمینه را برای تنظیم قضیه‌ای شبیه قضیهٔ b-۲.۵، برای سایر تابع‌های مثلثاتی فراهم می‌کنند.

قضیهٔ a-۴.۵. اگر $-۹۰^\circ\leqslant\alpha_j\leqslant۹۰^\circ$، آن‌وقت

$$cos\alpha_۱+cos\alpha_۲+\ldots+cos\alpha_n\leqslant n\,cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n}{n} \qquad (۹)$$

(علامت برابری برای $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$)؛ همچنین باشرط $0 \leqslant \alpha_j < 90^\circ$:

$$(10) \quad tg\alpha_1 + tg\alpha_2 + \ldots + tg\alpha_n \geqslant n\, tg\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$$

(علامت برابری برای $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$). نتیجه‌هایی شبیه (۱۰)، برای سکانت، کسکانت و کتانژانت هم به‌دست می‌آید [دراین‌حالت‌ها، دامنهٔ تعریف همان است که برای حالت $n = 2$ در (۴) و (۲) و (۸) داشتیم].

E.۱۰ ثابت کنید، برای $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 180^\circ$، داریم:

$$\sin\alpha \sin\beta \leqslant \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(باعلامت برابری، برای $\alpha = \beta$). نابرابری مشابهی را برای کسینوس‌ها، باشرط $-90^\circ \leqslant \alpha, \beta \leqslant 90^\circ$ ثابت کنید.

E.۲۰ برای α و β و γ، زاویه‌های یك مثلث، ثابت کنید حداکثر عبارت $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ برابراست با $\frac{3}{2}$، که درمثلث متساوی‌الاضلاع پیش می‌آید. همچنین ثابت کنید، با آن‌که این مجموع همیشه از ۱ بزرگتر است، می‌نیمم ندارد.

E.۳۰ در مسالهٔ قبل، به‌جای $\cos\alpha$، مقدارآن را $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ و همین‌طور به‌جای $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ مقدار نظیر آن را قرار دهید و ثابت کنید، نابرابری

$$2abc < (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - 2(a^3+b^3+c^3) \leqslant 3abc$$

برای ضلع‌های a و b و c درهرمثلث برقراراست. [این نابرابری برای ضلع‌های مثلث برقرار است و نه هرمقدار مثبت a و b و c؛ حالت $a = b = 1$ و $c = 3$ را آزمایش کنید.]

E.۴۰ اگر α و β و γ زاویه‌های یك مثلث باشند، ماکزیمم هریك از دو عبارت $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ و $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ را پیدا کنید.

E.۵۰ حداقل مقدار $\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta + \operatorname{cosec}\gamma$ را، وقتی α

و β و γ زاویه‌های یک مثلث باشند، به‌دست آورید.

E.۶. برای زاویه‌های حادهٔ αو β و شرط $\alpha+\beta<۹۰^\circ$، ثابت کنید: $tg\alpha . tg\beta \leqslant tg^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}$. ثابت کنید، با شرط $۹۰^\circ<\alpha+\beta<۱۸۰^\circ$، جهت نابرابری عوض می‌شود و در حالت $\alpha+\beta=۹۰^\circ$، نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود. به‌جز حالت $\alpha+\beta=۹۰^\circ$، نابرابری تنها برای $\alpha=\beta$ منجر به‌برابری خواهد شد.

E.۷. برای α، βو γ، زاویه‌های یک‌مثلث، ثابت کنید:

$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}\leqslant\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

برابری تنها برای مثلث متساوی‌الاضلاع است. همچنین، ثابت کنید برای هر مثلث با زاویه‌های حاده داریم:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma\geqslant ۳\sqrt{۳}\,،\qquad tg\alpha . tg\beta . tg\gamma\geqslant ۳\sqrt{۳}$$

علامت‌های برابری، تنها برای مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است.

E.۸. باشرط $۰<x،y<۱۸۰^\circ$، ماکزیمم $sin x sin y sin(x+y)$را پیدا کنید.

E.۹. دو نقطهٔ P و Q برمحیط دایره‌ای داده شده‌اند. نقطهٔ R را برمحیط دایره طوری پیدا کنیدکه مثلث PQR: I) مساحت ماکزیمم و II) محیط ماکزیمم داشته باشد.

E.۱۰. ضلع‌های مثلث را aوbو c و زاویه‌های نظیر روبه‌رو به آن‌ها را αوβو γ بگیرید. آیا می‌توان از نابرابری $a<\frac{b+c}{۲}$، نابرابری $\alpha<\frac{\beta+\gamma}{۲}$ را نتیجه گرفت؟ آیا عکس این حکم درست است؟

۵.۵. اکسترمم‌های عبارت $a sin\theta+b cos\theta$. اگر a و b، دومقدار ثابت باشند، ماکزیمم عبارت $a sin\theta+b cos\theta$ برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ و می‌نیمم

آن برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}-$ است. در واقع، عبارت مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\sqrt{a^۲+b^۲}\left(\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\cos\theta\right) \qquad (۱)$$

برای هر دوعدد حقیقی a و b، به‌شرطی‌که هر دو باهم برابر صفر نباشند، زاویه‌ای مثل λ وجود دارد، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$\cos\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\ ,\quad \sin\lambda=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

زیرا، نقطهٔ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}},\ \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right)$ روی‌دایرهٔ واحد $x^۲+y^۲=۱$ قرار دارد. به‌این ترتیب، عبارت (۱) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{a^۲+b^۲}(\cos\lambda\sin\theta+\sin\lambda\cos\theta)=\sqrt{a^۲+b^۲}\sin(\theta+\lambda)$$

برای این که این‌عبارت به‌حداکثر مقدار خود برسد، باید θ را طوری‌انتخاب کرد که داشته باشیم: $\sin(\theta+\lambda)=۱$؛ به‌همین‌ترتیب، وقتی‌به‌حداقل‌مقدار خود می‌رسدکه داشته باشیم $\sin(\theta+\lambda)=-۱$. وقتی a و b مقدارهایی مثبت باشند، مقدار منحصر به‌فردی برای $۰\leqslant\theta\leqslant۹۰^\circ$ به‌دست می‌آیدکه، به‌ازای آن، عبارت مفروض ماکزیمم شود.

باهمین روش می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت‌کرد:

قضیهٔ ۵.۵‌ــa. برای هرمقدار ثابت $a>۱$، حداقل عبارت $a\sec\theta-tg\theta$، با شرط $۰\leqslant\theta<۹۰^\circ$، برابراست با $\sqrt{a^۲-۱}$ و وقتی به‌این حداقل می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\sec\theta=\frac{a}{\sqrt{a^۲-۱}}\ ,\qquad tg\theta=\frac{۱}{\sqrt{a^۲-۱}} \qquad (۲)$$

علاوه براین، برای هرمقدار ثابت ومثبت c، حداقل مقدار

$$a\sqrt{c^2+x^2}-x \qquad (۳)$$

در حوزهٔ عددهای حقیقی، برابر است با $c\sqrt{a^2-1}$، که تنها به‌ازای $x=\frac{c}{\sqrt{a^2-1}}$ به‌دست می‌آید.

برای اثبات بخش اول مساله، می‌نویسیم:

$$m=a\sec\theta-tg\theta \qquad (۴)$$

یعنی، باید حداقل مقدار m را پیدا کنیم. رابطهٔ (۴) را می‌توان به‌صورت $a=m\cos\theta+\sin\theta$ نوشت. درسمت راست برابری، بایك ترکیب خطی از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ سروکار داریم که‌حداقل آن را، در ۵.۵، پیدا کردیم. دراین‌جا باید λ را این‌طور تعریف‌کرد:

$$\cos\lambda=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \sin\lambda=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \quad (0<\lambda<90^\circ)$$

به‌این‌ترتیب $a=m\cos\theta+\sin\theta$ به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}=\sin(\theta+\lambda)$$

حداقل مقدارممکن برای m وقتی به‌دست می‌آیدکه $\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$، یعنی $\sin(\theta+\lambda)$ به‌حداکثر خود برسد؛ یعنی داشته باشیم: $\sin(\theta+\lambda)=1$، یا $\theta+\lambda=90^\circ$. بنابراین

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}=1 \Rightarrow m=\sqrt{a^2-1}$$

$$\sin\theta=\cos\lambda=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{a},$$

$$\cos\theta=\sin\lambda=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

که ازآن‌ها، مقدارهـای $\sec\theta$ و $tg\theta$، به‌همان‌صورتی که در (۲) آمـده‌اند، به‌دست می‌آید.

بخش‌دوم قضیه، نتیجه‌ای فـرعی از بخش اول آن است. بـرای پیدا کردن حداقل عبارت (۳) درحـوزهٔ عددهای حقیقی x، می‌تـوانیم خـود را به‌حـالـت $x \geqslant ۰$ محـدود کنیم، زیـرا بـرای هـرمقـدار مثبت x داریـم: $F(-x) > F(x)$، که درآن، $F(x)$ همان عبارت (۳) است.

برای $x \geqslant ۰$، فرض می‌کنیم: $tg\theta = \frac{x}{c}$ $(۰ \leqslant \theta < ۹۰^\circ)$. بنابـرایـن

خواهیم داشت: $\sec\theta = \frac{\sqrt{c^۲ + x^۲}}{c}$ وعبارت (۳) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$c(a\sec\theta - tg\theta)$$

و باتوجه به‌بخش اول‌قضیه، حداقل آن وقتی به‌دست می‌آیدکه‌داشته‌باشیم:

$$tg\theta = \frac{۱}{\sqrt{a^۲ - ۱}}\ , \qquad x = ctg\theta = \frac{c}{\sqrt{a^۲ - ۱}}$$

برای تکمیل اثبات، یادآوری می‌کنیم‌که شرط $a > ۱$ ضروری است، زیرا برای‌هرمقدار دیگری‌از a، عبارت $a\sec\theta - tg\theta$، بافرض $۰ \leqslant \theta < ۹۰^\circ$، می‌نیمم ندارد. این چگونگی برای $a < ۰$ روشن است، زیرا بانزدیك شدن θ به ۹۰ درجه، هـردو مقدار $\sec\theta$ و $tg\theta$، دراین‌حالت، به‌سمت ∞ میل می‌کنند. درحالت $۰ < a \leqslant ۱$ داریم:

$$a\sec\theta - tg\theta = \sec\theta - tg\theta - (۱ - a)\sec\theta =$$

$$= \frac{۱}{\sec\theta + tg\theta} - (۱ - a)\sec\theta$$

(با استفاده از اتحاد $ces^۲\theta - tg^۲\theta = ۱$). کسر مقداری مثبت دارد و، وقتی θ به ۹۰ درجـه نزدیك شود، بـه‌سمت صفر میل می‌کند. از ایـن‌رو، برای $a = ۱$، عبارت $\sec\theta - tg\theta$، با آن‌که می‌تواند تاحد دلخواه به‌صفرنزدیك شود، می‌نیمم‌ندارد. درحالت $۰ < a < ۱$، باتوجه به‌عبارت $(a - ۱)\sec\theta$،

روشن می‌شود که‌عبارت $asec\theta - tg\theta$، وقتی θ به ۹۰ درجه نزدیك شود، از هرمقدار حقیقی محدودی کوچکتر می‌شود و، بنابراین، می‌نیمم ندارد.

۱۱.E. حداکثر عبارت $sin\theta + cos\theta$ را پیدا کنید.

۱۲.E. باشرط $0 \leqslant x \leqslant 1$، حداکثر مقدار $4x + 3\sqrt{1-x^2}$ را پیدا کنید.

۱۳.E. با شرط $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$، حداکثر مقدار $4x + \sqrt{3-x^2}$ را پیدا کنید.

۱۴.E. به شرط حقیقی‌بودن x، حداقل مقدار $5\sqrt{9+4x^2} - 8x$ را به‌دست آورید.

۱۵.E. اگر a و b، عددهای حقیقی مفروضی باشند، برای مقدارهای حقیقی θ، ماکزیمم عبارت $acos^2\theta + bsin^2\theta$ را پیدا کنید.

۱۶.E. ماکزیمم هریك ازاین عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$\text{(a)}\ sin\theta sin2\theta,\quad \text{(b)}\ sin\theta cos2\theta,\quad \text{(c)}\ 2cos\theta + 3sin^2\theta$$

۱۷.E. کمترین مقدار عبارت $tg\theta + 4cotg\theta$ را، برای زاویه‌های حادهٔ θ، پیدا کنید.

۱۸.E. باشرط $0 < \theta < 180°$، کمترین مقدار هریك ازاین دوعبارت را پیدا کنید:

$$9sin\theta + cosec\theta \quad \text{و} \quad sin\theta + 9cosec\theta$$

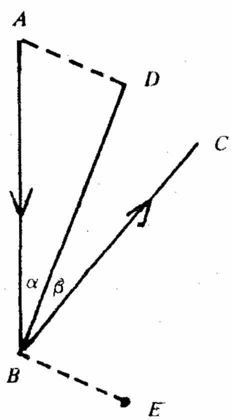
۶.۵. مقابله با باد مخالف: برای این که یك قایق بادبانی، باحداکثر سرعت به‌سمت شمال حرکت کند، چگونه باید با باد شمال مقابله کند؟ در این جا به‌حل این مساله می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که، مقابلهٔ با باد مخالف یعنی چه و یك قایق بادبانی، چگونه درجهت مخالف باد حرکت می‌کند؟ برای روشن بودن موقعیت، فرض می‌کنیم که، باد، به‌طور مداوم به سمت شمال بوزد.

درشکل ۶.۵-a، جهت‌حرکت باد را با بردار $\overrightarrow{AB}$ و جهت حرکت‌قایق

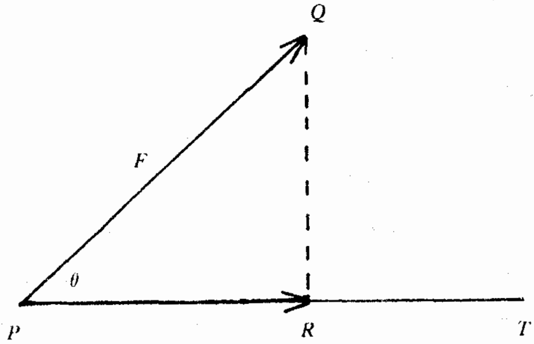
را با بردار $\overrightarrow{BC}$ نشان داده‌ایم. $\overrightarrow{BC}$، مسیرقایق را مشخص می‌کند. قایق‌ران می‌تواند، با استفاده ازسکان و دیرک کف‌قایق، آن را دراین مسیر نگه‌دارد. برای این که نیروی باد، ازطریق بادبان به‌قایق‌منتقل شود و آن را درجهت BC به‌حرکت درآورد، بادبان را در راستای BD درنظر گرفته‌ایم؛ جهت بادبان هم، به‌وسیلهٔ قایق‌ران کنترل می‌شود. مساله این است: جهت‌های BD و BC، برای‌بادبان ومسیر قایق، چگونه‌باشد تا قایق با حداکثرسرعت ممکن٭ به‌سمت شمال حرکت کند؟

[هرخواننده‌ای که‌با قایق‌رانی آشنایی داشته باشد، متوجه می‌شود که ما، دراین جا، مساله‌را ساده کرده‌ایم و بسیاری از جنبه‌های آن را کنار گذاشته‌ایم. در واقع، با این‌ساده کردن، خواسته‌ایم به‌نخستین مرحله ازحل مساله نزدیك شویم. دراین‌باره، درپایان بحث، اندکی توضیح خواهیم داد.]

نکته مهم دراین‌جا، داشتن تصور درستی از مولفه‌های نیرو وسرعت است. اگر نیروی F را با بردار $\overrightarrow{PQ}$ نشان‌دهیم (شکل ۶.۵-b)، آن‌وقت، مولفهٔ این نیرو در راستای PT، با تصویر PQ بر PT نشان داده می‌شود ($\overrightarrow{PR}$). اندازهٔ این مولفه، به‌زبان سادهٔ مثلثاتی، برابر است با $F.\cos\theta$ که، درآن، θ برابر است با زاویهٔ بین نیرو و راستای مولفهٔ. مولفهٔ سرعت را



شکل ۶.۵—a



شکل ۶.۵-b

هم، به‌همین‌طریق می‌توان تعریف کرد.

درشکل ۶.۵-a، زاویه‌های ABD و DBC را، به ترتیب، α و β می‌نامیم. اگر نیروی باد را با F نشان دهیم، ضربهٔ بادبربادبان، عبارت است‌از مؤلفهٔ F در راستای AD، عمود بربادبان. این مولفه برابراست با

$$F\cos(90^\circ - \alpha) = F\sin\alpha$$

(زاویه بین AB و AD، برابر $90^\circ - \alpha$ است).

نیروی $F\sin\alpha$، به‌جزاین‌که قایق‌را درجهت BC به‌حرکت می‌آورد، اثر دیگری ندارد. بنابراین، باید مؤلفه $F\sin\alpha$ را در راستای BC پیدا کنیم. زاویهٔ بین AD (امتداد $F\sin\alpha$) و BC (امتداد مسیر قایق) برابر است با $90^\circ - \beta$، بنابراین، برای پیدا کردن مؤلفهٔ $F\sin\alpha$ در راستای BC، باید $F\sin\alpha$ را در $\cos(90^\circ - \beta)$ ضرب کرد:

$$F\sin\alpha\cos(90^\circ - \beta) = F\sin\alpha\sin\beta$$

و این، همان نیروی مؤثر باد برقایق است که ازطریق بادبان منتقل‌می‌شود. سرعت قایق، در طول مسیر خود، متناسب باهمین نیروی موثر است. اگر شدت حرکت باد را ثابت فرض کنیم، F مقداری ثابت می‌شود که، درنتیجه، سرعت حرکت قایق درمسیر BC متناسب با $\sin\alpha\sin\beta$ خواهد بود. این استدلال نشان می‌دهد که، قایق بادبانی، می‌تواند برخلاف جهت باد حرکت کند؛ اگرچه این حرکت، به‌طور مستقیم، درجهت مخالف حرکت‌بادنیست.

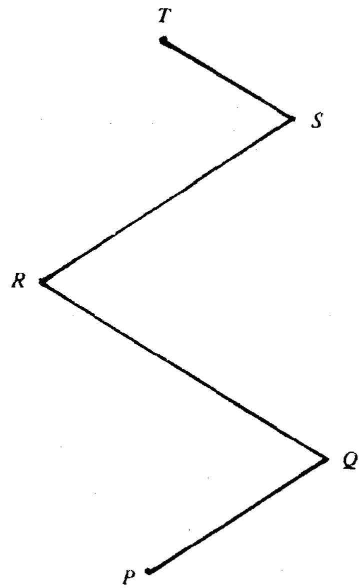
برای حل مسانه، نباید به‌دنبال حداکثر مقدار $\sin\alpha\sin\beta$ برویم، زیرا

هدف ما، افزایش مؤلفهٔ سرعت قایق در راستای شمال است. (می‌خواهیم قایق را با حداکثر سرعت ممکن، به سمت شمال ببریم). حرکت روی مسیر BC انجام می‌گیرد و زاویهٔ ABC (زاویهٔ بین مسیر BC و راستای شمال) برابر $\alpha+\beta$ است. بنابراین، مولفهٔ سرعت در راستای شمال، با $sin\alpha sin\beta cos(\alpha+\beta)$ متناسب است. اگر $\gamma=۹۰^\circ-\alpha-\beta$ بگیریم، مساله به‌این‌جا منجر می‌شود که: α،βوγ را طوری انتخاب کنیم که $sin\alpha sin\beta sin\gamma$ به‌حداکثر مقدار خود برسد. (باشرط $\alpha+\beta+\gamma=۹۰^\circ$) و در (۹) از ۳.۵ دیدیم که، این ماکزیمم، وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma=۳۰^\circ$.

به‌این ترتیب: برای‌این‌که حرکت‌قایق به‌طرف شمال، باحداکثرسرعت ممکن انجام‌گیرد، باید مسیری برای آن انتخاب‌کردکه باسمت شمال، زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد (چه درطرف شمال خاوری و چه درطرف شمال باختری) و بادبان را بین جهت باد وجهت حرکت، تنظیم کرد.

قایق، برای مقابلهٔ با باد، ومثلاً برای رسیدن از نقطهٔ P به‌نقطهٔ T (شکل ۶.۵-c)، باید مسیری دندانه‌ای را انتخاب کند و، به‌عنوان نمونه، ابتدا درطول PQ، بعد درطول QR، سپس درطول RS و سرانجام در طول STحرکت کند. به‌دلیل این که درلحظه‌های تغییرمسیر درنقطه‌های Q،RوS، ازسرعت قایق کاسته می‌شود، بهتر است برای رسیدن از P به T تنها یك «چرخش» داشته باشیم.

در دریانوردی، به‌دلیل وجود جریان‌های آب، گردبادها و مسیرهای بن‌بست، نمی‌تواند به‌این‌سادگی (با کشتی‌های بادبانی) انجام‌گیرد. راه‌حلی که برای‌این مساله آوردیم، براساس این فرض است‌که، دریانورد، درسطحی مستوی و دریایی آرام، با باد مخالف مواجه باشد. علاوه‌براین، وقتی باد به‌سطح بادبان می‌خورد، به‌آن انحنا می‌دهد و، درنتیجه، با ویژگی‌های آئرودینامیکی خود، نمی‌تواند با مؤلفهٔ نیروها مورد تفسیر قرارگیرد. به‌همین‌مناسبت، انتخاب زاویهٔ α (بین مسیر باد و بادبان)، نمی‌تواندبه‌کمك محاسبه، به‌طور دقیق، انجام‌گیرد؛ دراین مورد، هر دریانورد، بایدبرتجربهٔ



شکل ۵.۶—c

طولانی خود متکی باشد. به‌جز همهٔ این‌ها، دراین‌جا، تاثیری را که نیروی باد بر خودقایق دارد ومانع ازحرکت‌آن درجهت راستای بدنهٔ قایق‌می‌شود، به‌حساب‌نیاوردیم وفرض را براین گرفتیم که، قایق بادبانی، درجهت ازانتها به‌طرف‌نوك خود حرکت می‌کند. طبیعی است، وقتی این عامل‌های اضافی را هم درنظر بگیریم، مسیرقایق (برای به‌دست‌آوردن حداکثر سرعت) به‌سمت شمال، نسبت به‌مسیر باد، زاویه‌ای کمتر از ۶۰ درجه می‌سازدکه، البته، چندان هم قابل صرف‌نظرکردن نیست. همان‌طورکه در ابتدا گفتیم، تحلیل ریاضی‌ما ازمساله، را، تنها باید یك‌برخورد ابتدائی‌باموقعیت واقعی‌دانست.

[مسالهٔ مقابلهٔ با باد مخالف را، از کتاب *Dörrie* (چاپ سال ۱۹۶۵ صفحه‌های ۳۶۳ تا ۳۶۶) برداشته‌ایم.]

فصل ششم

چندضلعی‌های محیطی و محاطی

۶.۱. ورود به‌موضوع: از بین همهٔ nضلعی‌های محاط در یک دایره، کدام یک دارای حداکثر مساحت و کدامیک دارای حداکثر محیط است؟ جواب منحصر، nضلعی منتظم است؛ در این حالت، نمی‌توان به کمترین مساحت و کمترین محیط پرداخت. از طرف دیگر، از میان nضلعی‌های محیط بر یک دایره، nضلعی منتظم، کمترین مساحت و کمترین محیط را دارد. در فصل بعد، دربارهٔ مساله‌های مشابهی برای بیضی، بحث کرده‌ایم.

تعریف چندضلعی محاط در یک دایره و چندضلعی محیط بر یک دایره. چندضلعی را، نسبت به‌دایره، محاطی گویند، وقتی که بتوان از همهٔ راس‌های آن، یک‌دایره گذراند؛ چندضلعی را محیطی، نسبت به‌دایره گویند، وقتی بتوان دایره‌ای چنان رسم کرد که برهمه ضلع‌های آن مماس باشد.

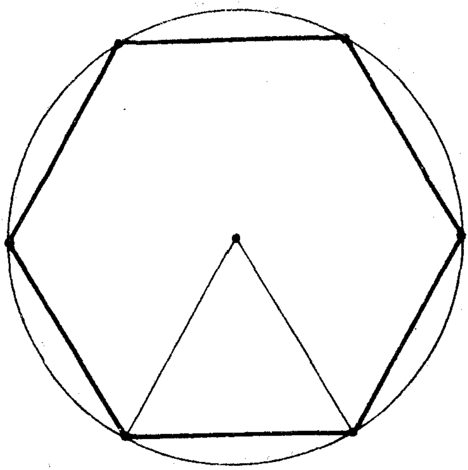
پرسش طبیعی دیگری‌هم، دراین‌جا، مطرح می‌شود که مربوط به‌مقایسهٔ nضلعی منتظم با $(n+۱)$ ضلعی منتظم است برایمان روشن است که، نسبت هم‌پیرامونی، از n به $n+۱$، افزایش می‌یابد.

اگر مساحت و محیط nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ با شعاع واحد را، به‌ترتیب، A_n و L_n بگیریم، داریم:

$$A_n = \frac{۱}{۲} n \sin \frac{۳۶۰^\circ}{n}, \quad L_n = ۲ n \sin \frac{۱۸۰^\circ}{n} \qquad (۱)$$

درستی این دو دستور را می‌توان، به‌سادگی به کمک مثلثی که‌یک راس آن در مرکز دایره و دو راس دیگرش در دو راس مجاور nضلعی باشد، تحقیق کرد (درشکل ۶.۱-a، حالت $n=۶$ رسم شده است).

در دستورهای (۱)، زاویه‌ها را برحسب درجه نوشته‌ایم؛ و این،



شکل ۱.۶—a

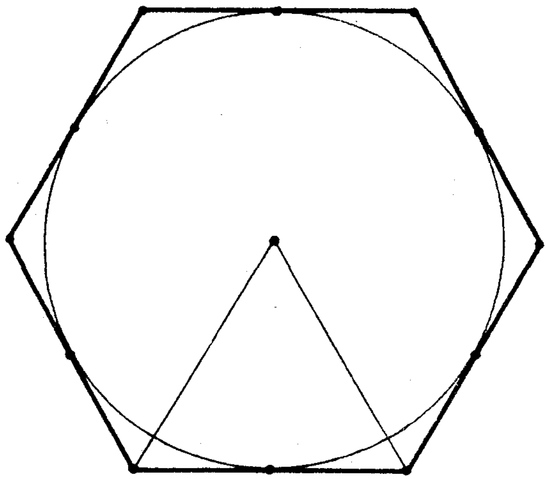
به‌دلیل آن است که می‌خواهیم، ازآن‌ها، برای تعریف π استفاده کنیم (بند ۴.۶ رابببینید) وازآن‌جا، دستورهای $C=2\pi r$ و $A=\pi r^2$ را، برای محیط ومساحت دایره، به‌دست‌آوریم. البته، می‌توانیم ازاین قرارداد استفاده کنیم که π رادیان برابراست با ۱۸۰ درجه (وما هم، ازاین‌قرارداداستفاده‌کرده‌ایم) ولی سعی می‌کنیم، به‌موقع خود، بیشتر به‌این موضوع بپردازیم. فعلاً π را تنها به‌عنوان نمادی به‌کار می‌گیریم که جای‌گزین ۱۸۰ درجه شده است.

شبیه دستورهای(۱)، برای A'_n و L'_n، مساحت ومحیط nضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به‌شعاع واحد هم، این دستورها وجود دارد:

$$A'_n=n\,tg\frac{180^\circ}{n},\quad L'_n=2n\,tg\frac{180^\circ}{n} \qquad (2)$$

این‌دستورها را هم می‌توان، باتوجه به‌مثلث‌هایی که یك راس آن‌ها درمرکز دایره و دو راس دیگرشان در دو راس مجاور nضلعی محیطی منتظم باشند، به‌دست آورد (درشکل ۱.۶-b، $n=6$ گرفته شده است).

اگر وجود ماکزیمم‌ومی‌نیمم را، ازقبل، مفروض بگیریم، کاراین بخش



شکل ۱.۶—b

ساده‌تر خواهد شد. مثلاً، اگر فرض‌کنیم، nضلعی با مساحت ماکزیمم قابل محاط در دایره وجود دارد، می‌توانیم به‌سادگی نتیجه‌بگیریم که، این nضلعی، یك nضلعی منتظم است. ثابت می‌کنیم، اگر A و B و C سه‌راس پشت‌سرهم از nضلعی محاطی به‌مساحت ماکزیمم باشد، آن‌گاه داریم: $AB = BC$، و از‌این‌جا نتیجه می‌گیریم که، همهٔ ضلع‌ها باهم برابرند و با nضلعی منتظم سروکار داریم. درواقع، اگر $AB \neq BC$، آن‌وقت می‌توانیم به‌جای B، نقطهٔ B' وسط کمان ABC را درنظر بگیریم؛ مثلث $AB'C$ به‌دست می‌آید که‌مساحت آن ازمساحت مثلث ABC بیشتر است، زیرا دو مثلث در قاعدهٔ AC مشترك‌اند، ولی ارتفاع مثلث $AB'C$ از ارتفاع مثلث ABC بزرگتر است.

درحالت $n = ۴$، می‌توان بدون هیچ پیش‌فرضی ثابت‌کرد‌که، مربع، دربین همهٔ چهارضلعی‌های محاط دریك دایره، دارای حداکثر مساحت است. $ABCD$ را یك‌چهارضلعی‌دلخواه محاط دردایره فرض‌می‌کنیم. ثابت‌می‌کنیم، اگر $ABCD$ یك‌مربع باشد، دارای حداکثر مساحت است. اگر $ABCD$ یك مربع نباشد، مثل مورد بالا، B' را وسط کمان ABC و، هم‌زمان با آن، D'

را وسط کمان ADC می‌گیریم. مساحت چهارضلعی $AB'CD'$، از مساحت چهارضلعی $ABCD$ بیشتر است، مگر این که دو چهارضلعی بر هم منطبق باشند. توجه کنیم که $B'C'$، قطری از دایره است. اکنون، به‌جای A و C، به‌ترتیب، A' و C'، وسط کمان‌های $B'AD'$ و $B'CD'$ را قرار می‌دهیم. چهارضلعی $A'B'C'D'$ یك‌مربع است و مساحتی بیشتراز مساحت چهارضلعی $AB'CD'$ (وهم مساحت چهارضلعی $ABCD$) دارد.

۲.۶. چندضلعی‌های منتظم

قضیه. دربین nضلعی‌های منتظم، نسبت هم‌پیرامونی $\frac{4\pi A}{L^2}$، همراه با n، افزایش پیدا می‌کند (هرچه تعداد ضلع‌ها بیشتر باشد، نسبت هم‌پیرامونی هم‌بزرگتراست). به‌زبان دیگر $n+1$ ضلعی منتظم با محیط معلوم c،دارای مساحتی بیشترازمساحت nضلعی منتظم با همان محیط c است. و یا: $n+1$ ضلعی منتظم بامساحت معلوم k، نسبت به n ضلعی منتظم با همان مساحت k، محیط کمتری دارد.

برای اثبات، می‌توانیم از دستورهای (۲) استفاده کنیم، زیرا در شکل‌های متشابه، نسبت هم‌پیرامونی تغییر نمی‌کند. عامل π را، درنسبت هم‌پیرامونی،کنار می‌گذاریم و زاویه‌ها را برحسب رادیان می‌نویسیم:

$$\frac{4A'_n}{(L'_n)^2}=\frac{4n\,tg\frac{\pi}{n}}{\left(2n\,tg\frac{\pi}{n}\right)^2}=\frac{1}{n\,tg\frac{\pi}{n}} \qquad (1)$$

ثابت می‌کنیم، با بزرگ‌شدن n، مقدار $n\,tg\frac{\pi}{n}$ کوچك می‌شود، یعنی نسبت (۱) افزایش می‌یابد. ثابت می‌کنیم، برای $n\geqslant 3$، داریم

$$n\,tg\frac{\pi}{n}>(n+1)\,tg\frac{\pi}{n+1} \qquad (2)$$

اگر درنابرابری(۱۰)درقضیهٔ a-۴.۵، n را به $n+1$ تبدیل کنیم و $\alpha_1=0$

بگیریم و به‌جای زاویه‌های دیگر $\alpha_۲$، $\alpha_۳$،...، $\alpha_{n+۱}$، مقدار $\frac{\pi}{n}$ را قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$tg\,۰+n\,tg\frac{\pi}{n}>(n+۱)\,tg\frac{\pi}{n+۱}$$

(چون همهٔ زاویه‌ها باهم برابر نیستند، باید نابرابری را اکیدگرفت).

قضیهٔ b-۲.۶. اگر A_n و L_n، به‌ترتیب مساحت و محیط یك nضلعی محاط در دایرهٔ به‌شعاع واحد باشند، آن‌وقت $A_n<A_{n+۱}$ و $L_n<L_{n+۱}$.

باتوجه بـه‌دستور (۱) از بند قبل، برای اثبات $A_n<A_{n+۱}$، بـاید ثابت کنیم:

$$n\,sin\frac{۲\pi}{n}<(n+۱)sin\frac{۲\pi}{n+۱} \qquad (۳)$$

اثبات نـابرابری (۳)، به‌سادگی ازنابرابری (۳) در قضـیهٔ b-۲.۵ به‌دست می‌آید، به‌شرطی‌که آن را برای $n+۱$ و زاویه‌های زیر بنویسیم:

$$\alpha_۱=۰\,,\quad \alpha_۲=\alpha_۳=\ldots=\alpha_{n+۱}=\frac{۲\pi}{n}$$

(واسطهٔ حسابی این زاویه‌هابرابر است با $\left(\frac{۲\pi}{n+۱}\right)$.

اثبات نابرابری $L_n<L_{n+۱}$ هم، به‌همین‌طریق به‌دست می‌آید، زیرا باتوجه به‌دستورهای (۱) ازبندقبل، باید نابرابری $n\,sin\frac{\pi}{n}<(n+۱)sin\frac{n}{n+۱}$ را ثابت کنیم، که باز هم نتیجه‌ای است از قضیهٔ b-۲.۵، به ازای $n+۱$ و زاویه‌های $\alpha_۱=۰$ و $\alpha_۲=\ldots=\alpha_{n+۱}=\frac{\pi}{n}$.

قضیهٔ c-۲.۶. اگـر مساحت و محیط nضلعی محیط بر دایرهٔ به‌شعاع واحد را A'_n و L'_n بگیریم، داریم: $A'_n>A'_{n+۱}$ و $L'_n>L'_{n+۱}$.

باتوجه به‌دستورهای (۲) از بندقبل، هردو نابرابری‌منجر به‌نابرابری

$n\,tg\frac{\pi}{n}>(n+۱)\,tg\frac{\pi}{n+۱}$ می‌شوندکه آن را قبلاً ثابت کرده‌ایم.

۳.۶. چندضلعی‌های محاطی ومحیطی

قضیهٔ ۳.۶-a. از بین همهٔ مثلث‌های محاط دریك دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای مساحت ومحیط حداکثر است.

کافی است قضیه را، برای دایرهٔ به‌شعاع واحد ثابت کنیم، زیرا در هر دایره می‌توان طول شعاع را، به‌عنوان واحد طول، درنظر گرفت.

ابتدا مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع T را درنظر می‌گیریم‌که مرکزدایرهٔ محیطی آن، در درون مثلث واقع باشد. فرض می‌کنیم، سه‌ضلع مثلث از مرکز دایره، به‌ترتیب، با زاویه‌های α، β و γ دیده شوند؛ دراین‌صورت $\alpha+\beta+\gamma=۳۶۰^\circ$. مساحت ومحیط این مثلث چنین است:

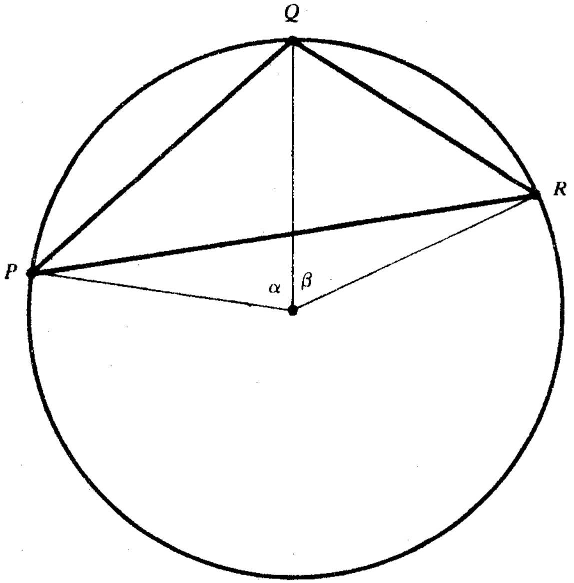
$$\frac{۱}{۲}(sin\,\alpha+sin\,\beta+sin\,\gamma)\quad \text{و}\quad ۲\left(sin\frac{\alpha}{۲}+sin\frac{\beta}{۲}+sin\frac{\gamma}{۲}\right)$$

باتوجه به‌قضیهٔ ۲.۵-b، هریك از این‌دوعبارت، وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسندکه داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma$. یعنی: مثلث T، وقتی‌به‌حداکثر مساحت ومحیط می‌رسدکه متساوی‌الاضلاع باشد.

اکنون، مثلث دلخواه محاط در دایرهٔ به‌شعاع واحد را طوری‌درنظر می‌گیریم‌که مرکز دایره دربیرون مثلث واقع باشد دراین‌حالت، اگر دوضلع کوچکتر مثلث، با زاویه‌های α و β ازمرکز دیده شوند، زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به‌ضلع بزرگتر برابر $\alpha+\beta$ خواهد شد (شکل ۳.۶-a). بنابراین، برای مساحت مثلث PQR داریم:

$$\frac{۱}{۲}sin\alpha+\frac{۱}{۲}sin\,\beta+\frac{۱}{۲}sin(\alpha+\beta)<\frac{۱}{۲}sin\,\alpha+$$

$$+\frac{۱}{۲}sin\,\beta\leqslant sin\frac{\alpha+\beta}{۲}<sin\,۹۰^\circ=۱$$



شکل ۳۰۶–a

یعنی، ازمساحت‌مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی در دایرهٔ به‌شعاع واحد (که برابـر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ است) کمتر است.

به‌همین‌ترتیب، برای محیط مثلث PQR داریم:

$$۲\sin\frac{\alpha}{۲}+۲\sin\frac{\beta}{۲}+۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\leqslant ۴\sin\frac{\alpha+\beta}{۴}+$$

$$+۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}<۴\sin ۴۵^\circ+۲\sin ۹۰^\circ=۲\sqrt{۲}+۲$$

که از $۳\sqrt{۳}$، یعنی محیط مثلث متساوی‌الاضـلاع محاط در دایـرهٔ به‌شعاع واحد، کمتر است،

قضیهٔ ۳۰۶–b. ازبین همهٔ nضلعی‌هـای منتظم محـاط در یـک دایره، nضلعی منتظم، دارای مساحت ماکزیمم و محیط ماکزیمم‌است.

در واقع، قضیهٔ a-۳.۶، حالت خاصی از قضیهٔ b-۳.۶؛ به‌ازای $n=۳$ است و ما به‌این دلیل آن‌ها را در دو قضیه جداگانه آورده‌ایم، که حالت خاص $n=۳$، اندکی بغرنج‌تر ازحالت کلی است.

برای اثبات قضیهٔ b-۳.۶ بدون این که به کلی بودن آن لطمه‌ای وارد آید، دوباره دایره را با شعاع واحد درنظر می‌گیریم. درمرحلهٔ اول فرض می‌کنیم، مرکز دایره در درون nضلعی محاطی P باشد. اگرضلع‌های nضلعی P، به‌زاویه‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$،...، α_n ازمرکز دایره دیده شوند، داریم:

$$\alpha_۱+\alpha_۲\dots+\alpha_n=۳۶۰^\circ$$

و چون nضلعی منتظم نیست، همهٔ این زاویه‌ها باهم برابر نیستند. مساحت nضلعی چنین است:

$$\frac{۱}{۲}(sin\alpha_۱+sin\alpha_۲+\dots+sin\alpha_n)<$$

$$<\frac{n}{۲}sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots+\alpha_n}{n}=\frac{n}{۲}sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

[قضیهٔ b-۲.۵ را ببینید؛ برای هر α_j داریم $۰<\alpha_j\leqslant ۱۸۰^\circ$]. بنابراین، با توجه به‌دستور (۱) از بند ۱.۶، n ضلعی‌منتظم دارای مساحت ماکزیمم است. محیط nضلعی P چنین است:

$$۲\left(sin\frac{\alpha_۱}{۲}+sin\frac{\alpha_۲}{۲}+\dots+sin\frac{\alpha_n}{۲}\right)<$$

$$<۲n sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots+\alpha_n}{۲n}=۲n sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

و درنتیجه، nضلعی منتظم، دارای حداکثر محیط است.

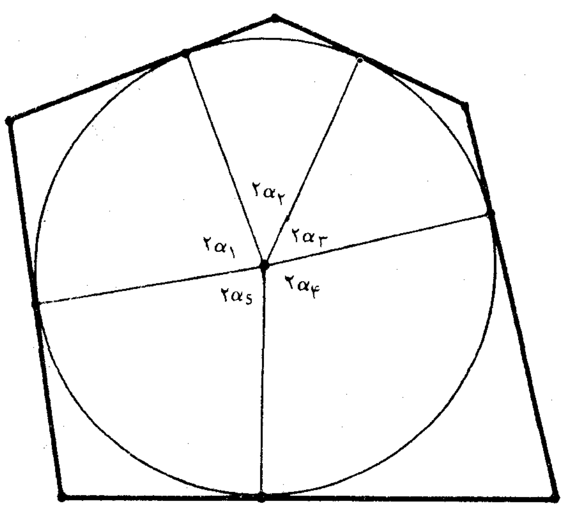
اکنون به‌حالتی می‌پردازیم که مرکز دایرهٔ واحد، در بیرون nضلعی محاطی P واقع‌باشد. باتوجه به‌قضیهٔ b-۲.۶ و دستورهای (۱) ازبند۱.۶، برای $n=۴$، می‌بینیم که مساحت و محیط nضلعی محاط در دایرهٔ به‌شعاع واحد، دست‌کم، برابر ۲ و $۴\sqrt{۲}$اند. (به‌ازای $n>۳$). چون قضیهٔ‌مربوط

به‌مثلث‌را قبلاً بررسی کرده‌ایم، می‌توانیم دراین‌جا $n > ۳$ بگیریم. چندضلعی P، به‌طور کامل دریك نیم‌دایرهٔ به‌شعاع واحد محاط شده است و این روشن است که مساحت و محیط این nضلعی، از مساحت و محیط نیم‌دایره کمتراست.

مساحت نیم‌دایره برابر $\frac{\pi}{۲}$ و محیط آن برابر $\pi + ۲$ است. و اثبات قضیه، باتوجه‌به $\frac{\pi}{۲} < ۲$ و $۴\sqrt{۲} > \pi + ۲$ به‌پایان می‌رسد.

قضیهٔ ۳.۶ـc ازبین‌همهٔ nضلعی‌های محیط بریك دایره، nضلعی منتظم دارای کمترین مساحت و کمترین محیط است، ولی دارای بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی می‌باشد.

دایره را به‌شعاع واحد می‌گیریم. nضلعی نامنتظم P را درنظر می‌گیریم که‌هر nضلع آن، در n نقطه، بردایره مماس‌باشند. (درشکل ۳.۶-b، حالت $n = ۵$ را می‌بینید). اگر ازمرکز دایره به نقطه‌های تماس وصل کنیم، n زاویه به‌دست می‌آیدکه، راس‌های آن‌ها، درمرکز دایره‌اند. این زاویه‌ها را $۲\alpha_۱$، $۲\alpha_۲$، ...، $۲\alpha_n$ می‌نامیم. روشن است که $\alpha_j < ۹۰^\circ$ و



شکل ۳.۶ـb

$$\alpha_{1}+\alpha_{2}+\dots+\alpha_{n}=180^\circ$$

nضلعی مفروض، به‌وسیلهٔ این شعاع‌های وارد به‌نقطه‌های تماس، به n چهارضلعی تقسیم می‌شود؛ طول ضلع‌ها واندازهٔ مساحت این چهارضلعی‌ها، به‌سادگی قابل محاسبه است. اگر A مساحت و L محیط nضلعی P باشد، داریم:

$$A=tg\alpha_{1}+tg\alpha_{2}+\dots+tg\alpha_{n} \quad و \quad L=2A \qquad (1)$$

چون nضلعی، منتظم نیست، همهٔ زاویه‌های α_1، α_2، ...، α_n باهم برابر نیستند و بنابرقضیهٔ a-۴.۵ داریم:

$$tg\alpha_{1}+tg\alpha_{2}+\dots+tg\alpha_{n}>n\,tg\,\frac{\alpha_{1}+\alpha_{2}+\dots+\alpha_{n}}{n}=n\,tg\frac{180^\circ}{n} \quad (2)$$

ازطرف دیگر، باتوجه به‌دستور (۲) از بند ۱.۶، می‌دانیم که $n\,tg\frac{180^\circ}{n}$، مساحت nضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ واحد است. به‌این‌ترتیب، ثابت شد که مساحت nضلعی منتظم محیط بر دایره، ازمساحت هر nضلعی دیگرمحیط براین دایره کمتر است. باتوجه به‌رابطهٔ $L=2A$، همین نتیجه، درمورد محیط‌ها هم به‌دست می‌آید.

اکنون‌ثابت می‌کنیم، نسبت هم‌پیرامونی،برای nضلعی‌منتظم محیطی بزرگترین است. برای هر nضلعی محیطی داریم: $L=2A$. بنابراین

$$\frac{4\pi A}{L^{2}}=\frac{4\pi A}{4A^{2}}=\frac{\pi}{A}$$

چون A،برای nضلعی‌منتظم محیطی کمترین‌مقداراست،درنتیجه $\frac{\pi}{A}$ به‌بیشترین مقدار خود می‌رسد.

۴.۶. تعریف π. تعریف عادی برای π، عبارت‌است از نسبت محیط دایره به‌قطر آن (متناظر با دستور $C=2\pi r$). باوجوداین، برای روشنی

بیشتر، به‌بحث مفصل‌تری دربارهٔ π می‌پردازیم؛ و این، برای آن است که، ابهام درتعریف π، موجب نگرانی نشود. زمینهٔ بحث را طرح می‌کنیم. در این‌جا، به‌مفهوم‌های اساسی طول پاره‌خط ومساحت مثلث نیاز داریم. روشن است که عدد π، دراین مفهوم‌ها دخالتی ندارد. از نابرابری‌های مثلثاتی فصل قبل هم استفاده خواهیم کرد. درمورد این نابرابری‌ها هم، نیازی به π نداریم وهمهٔ آن‌ها را می‌توان براساس کاربرد مثلثاتی اندازه‌های زاویه برحسب درجه به‌دست آورد. باعدد π وقتی روبه‌رو می‌شویم که بخواهیم اندازهٔ «رادیان» را از روی دستور $C=۲\pi r$ تعریف کنیم. درضمن، دربحث خود، از آن‌چه هم که در ۱.۶ و ۲.۶ گفته‌ایم، بهره خواهیم برد. توجه کنیم، برای ما، دایره ازتعریف آن، به‌عنوان مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه که ازنقطه ثابتی به‌یك فاصله‌اند، شناخته می‌شود. به‌مفهوم بازه‌های تو درتو روی محورعددهای حقیقی‌هم نیاز داریم. اگر $I_۱$، $I_۲$، ...، I_n، ... را بازه‌هایی از محور عددهای حقیقی بگیریم، به‌نحوی که هربازه شامل همهٔ بازه‌های بعداز خودش باشدوطول بازهٔ I_n، به‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت‌صفرمیل کند، آن‌وقت، عدد حقیقی منحصر به‌فردی وجود داردکه بین همهٔ این بازه‌ها مشترك است ازاین اندیشه، در۸.۲، وقتی که تلاش درتعریف‌عدد e داشتیم، استفاده کردیم.

شبیه ۱.۶، مساحت و محیط n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد را A_n و L_n ومساحت‌ومحیط nضلعی‌محیط بر دایرهٔ واحدرا A'_n و L'_n می‌نامیم. بنابرقضیه‌های b-۲.۶ و c-۲.۶، برای $n\geqslant ۳$، داریم:

$$A_n<A_{n+۱},\quad L_n<L_{n+۱},\quad A'_n>A'_{n+۱},\quad L'_n>L'_{n+۱} \qquad (۱)$$

نابرابری‌های زیر هم، برای هر n و k ($n\geqslant ۳$ و $k\geqslant ۳$) برقرارند:

$$A_n<A'_k,\quad L_n<L'_k \qquad (۲)$$

نابرابری اول (۲) روشن است، زیرا n ضلعی منتظم محاطی در درون k ضلعی منتظم محیطی قرار دارد. برای اثبات نابرابری دوم (۲)، از اثبات $L_n<L'_n$ آغاز می‌کنیم. از دستورهای (۱) و (۲) در ۱.۶، داریم:

$$L'_n - L_n = 2n\,tg\frac{180^\circ}{n} - 2n\sin\frac{180^\circ}{n} = 2n\,tg\frac{180^\circ}{n}\left(1-\cos\frac{180^\circ}{n}\right)$$

که مقداری است مثبت و، بنابراین $L'_n > L_n$. درحالت $n>k$ هم، نابرابری دوم (۲) واضح است، زیرا $L'_n < L_n < L'_k$. همچنین، درحالت $n<k$ داریم: $L_n < L_k < L'_k$. به‌این‌ترتیب، نابرابری دوم (۲) درست است.

اگر در برابری بالا، به‌نتیجهٔ $L'_n - L_n$ بیشتر توجه کنیم، متوجه می‌شویم که، با میل n به‌سمت بی‌نهایت، مقدار $L'_n - L_n$ به‌سمت صفر میل می‌کند. درواقع، برای $n>5$ داریم $L'_4 > L'_n$، وچون $L'_4 = 8$، بنابراین

$$L'_n - L_n = L'_n\left(1-\cos\frac{180^\circ}{n}\right) < L'_4\left(1-\cos\frac{180^\circ}{n}\right) = 8\left(1-\cos\frac{180^\circ}{n}\right)$$

با بزرگ‌شدن n، مقدار $\cos\frac{180^\circ}{n}$ به‌سمت $\cos 0$، یعنی واحد، و بنابراین $1-\cos\frac{180^\circ}{n}$ به‌سمت صفر میل می‌کند. درنتیجه، درحد، وقتی $n\to\infty$، $L'_n - L_n$ به‌سمت صفر میل خواهدکرد.

بازهٔ I_n را به‌صورت $(L_n ، L'_n)$ تعریف می‌کنیم که فاصله‌ای است باز از L_n تا L'_n. اگرمجموعهٔ بازه‌های I_3، I_4، I_5،... را درنظر بگیریم، وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، طول این بازه‌ها به‌سمت صفر میل‌می‌کنند. بنابراین، با این بازه‌های تودرتو، یك‌عددحقیقی‌منحصر به‌فرد تعریف‌می‌شود. محیط دایره، بین محیط‌های چندضلعی‌های L_n و L'_n قرار دارد وطبیعی است که، این‌عددحقیقی را، برابر بامحیط دایره‌ای به‌شعاع واحد بگیریم. طول محیط این دایره را با 2π نشان می‌دهیم.

وقتی‌که با دایره‌ای به‌شعاع r سروکار داشته باشیم، تمام نسبت‌ها، π برابر می‌شوند. دراین حالت، محیط nضلعی منتظم محاطی برابر rL_n و محیط nضلعی منتظم محیطی برابر rL'_n است. دراین‌صورت، بازه‌های تودرتوی $(rL_n ، rL'_n)$، عدد منحصر به‌فرد $2\pi r$ را تعریف می‌کنندکه‌همان محیط دایره است. به‌این‌ترتیب دستور $C = 2\pi r$ به‌دست می‌آید.

برای دایرهٔ به شعاع واحد، تفاضل $A_n - A'_n$، یعنی اختلاف مساحت nضلعی‌های منتظم محیطی ومحاطـی، بـه‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت صفر میل میل می‌کند. در واقع

$$A'_n - A_n = n\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n} - \frac{۱}{۲}n\,sin\frac{۳۶۰^\circ}{n} =$$

$$= n\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n} - n\,sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}cos\frac{۱۸۰^\circ}{n} = n\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n}\left(۱ - cos^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}\right) =$$

$$= A'_n\left(۱ - cos^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}\right) < A'_n\left(۱ - cos^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}\right)(n > ۴)$$

عبارت داخل پرانتز، با بزرگ‌شدن n، به‌صفر نزدیـك می‌شود و، در ضمن، $A'_۴ = ۴$.

به‌این‌ترتیب، دوباره، بامجموعه‌ای ازبازه‌های تودرتوی زیر سروکار داریم:

$$(A_۳ \,،\, A'_۳) \,،\, (A_۴ \,،\, A'_۴) \,،\, (A_۵ \,،\, A'_۵) \,،\ldots،\, (A_n \,،\, A'_n) \,،\ldots \qquad (۳)$$

که طول آن‌ها بـه‌سمت صفر میل می‌کند. این بازه‌های تودرتـو، کدام عدد حقیقی را تعریف می‌کنند؟ دنبالهٔ قبلی ازبـازه‌های $(L_n \,،\, L'_n)$، عدد ۲π را تعریف می‌کرد، بنابراین، دنبالهٔ بازه‌های $\left(\frac{۱}{۲}L_n \,،\, \frac{۱}{۲}L'_n\right)$، عدد π راتعریف می‌کند.

چون $\frac{۱}{۲}L'_n = A'_n$، این دنباله را می‌توان به‌صورت $\left(\frac{۱}{۲}L_n \,،\, A'_n\right)$نوشت که، مثل دنبالـهٔ (۳)، دارای نقطهٔ انتخابی A'_n است؛ یعنی دنبالـهٔ اخیر، باید به‌سمت همان حد، یعنی π، متقارب باشد. به‌این‌ترتیب، مساحت دایرهٔ به‌شعاع واحد، برابر است با π.

برای پیدا کردن مساحت دایرهٔ به‌شعاع r، توجه می‌کنیم که مساحت nضلعی منتظم محاط دراین دایره برابر $r^۲A_n$ ومساحت nضلعی منتظم محیط

برآن برابـر $r^2A'_n$ است. به‌این‌ترتیب، بـه‌دستور $A=\pi r^2$، برای مساحت دایرهٔ به‌شعاع r می‌رسیم.

۵.۶ دایره‌ها دربرابر چند ضلعی‌های منتظم. درجدول کوتاهی‌که در ۴.۴، برای نسبت‌های هـم‌پیرامـونی داشتیم، دیدیـم‌که دایـره، نسبت به هشت‌ضلعی، شش‌ضلعی و یا پنج‌ضلعی، نسبت هم‌پیرامونی بزرگتری داشت. درقضیهٔ ۴.۳-b، بافرض وجود جواب، همین‌مطلب را ثابت‌کردیم. اکنون دراین‌جا، اثبات دیگری ازاین قضیه می‌دهیم، بـدون این‌که هیچ پیش‌فرضی را بپذیریم؛ یعنی ثابت می‌کنیم: نسبت‌هم‌پیرامونی برای هر nضلعی منتظم، کوچکتر است ازنسبت هـم‌پیرامـونی در دایـره. [همین حـکم را، درفصل دوازدهم، برای هر nضلعی غیرمشخص، ثابت‌کرده‌ایم.]

قضیهٔ ۵.۶-a. اگر θ زاویـه‌ای حاده برحسب رادیان باشد، داریم: $\theta<tg\theta$.

به‌کمک این نابرابری روشن می‌شودکه، نسبت هم‌پیرامونی، برای‌هر nضلعی منتظم، کوچکتر ازنسبت هم‌پیرامونی در دایره است. در واقع، نسبت هم‌پیرامونی، در دایره برابر $\frac{2\pi A}{L^2}$، یعنی واحد است. برای nضلعی منتظم، نسبت هم‌پیرامونی، برابر است با

$$\frac{4\pi n\, tg\frac{\pi}{n}}{\left(2n\, tg\frac{\pi}{n}\right)^2}=\frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$$

(زاویه‌ها، برحسب رادیان‌اند)؛ که اگر برای هرزاویهٔ حادهٔ θ داشته باشیم $\theta<tg\theta$، آن‌وقت، نسبت بالا از واحدکوچکتر می‌شود.

برای اثبات نابرابری $\theta<tg\theta$، بخش CPQ از دایرهٔ واحد رادرنظر می‌گیریم. کمان PQ، روبه‌روبه‌زاویهٔ مرکزی به‌رأس C است. چون شعاع دایره برابر واحد است، مساحت تمامی دایـره برابر π می‌شود و، بنابراین،

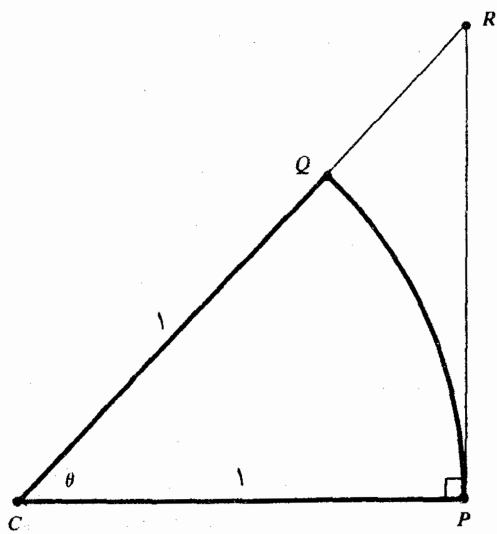
مساحت بخش CPQ، متناسب است با θ ، درواقع این مساحت برابر $\pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ یا $\frac{\theta}{2}$ می‌شود. از P عمودی بر CP رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با امتداد خط‌راست CQ، R می‌نامیم. (خط‌راست RP درنقطهٔ P بر دایره مماس است). چون $CP=1$، پس طول RP برابر $tg\,\theta$ است و مساحت مثلث CPR برابر $\frac{1}{2}tg\,\theta$ می‌شود. ازمقایسهٔ مساحت‌های بخش CPQ از دایره با مثلث CPR نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\,tg\theta \Rightarrow \theta<tg\,\theta$$

F۰۱۰. θ زاویه‌ای است حاده برحسب رادیان، ثابت کنید:

$$(\mathrm{I})\quad sin\theta<\theta\ ,\quad (\mathrm{II})\quad cos\theta>1-\theta$$

[برای اثبات نابرابری (I)، درشکل ۵.۶-a، مساحت مثلث CPQ را با مساحت قطع CPQ مقایسه کنید.]



شکل ۵.۶ - a

۲۰.F. مجموعهٔ همهٔ چهارضلعی‌هایی را درنظر می‌گیریم که درنیم‌دایرهٔ مفروض محاط باشند، به‌نحوی که دوانتهای قطرنیم‌دایره، دو راس چهارضلعی را تشکیل دهند. کدام چهارضلعی مساحت ماکزیمم دارد؟

۳۰.F. اگر بدانیم $x^۲+y^۲=۱$، ماکزیمم هریک از عبارت‌های $x+y$، xy و $۳x+۴y$ را پیدا کنید.

۴۰.F. برای عدد $n\geqslant ۲$، ثابت کنید، می‌توان n نقطه روی محیط‌دایرهٔ واحد انتخاب کرد (لزومی ندارد نقطه‌ها متمایز باشند) که مجموع مجذورهای همهٔ فاصله‌های دوبه‌دوی نقطه‌ها برابر $n^۲$ باشد، ولی نمی‌توان این مجموع را از $n^۲$ بزرگتر کرد. [دایرهٔ واحد را در دستگاه محورهای مختصات، به‌صورت $x^۲+y^۲=۱$ درنظر بگیرید. برای تعمیم مساله درمورد کره و نتیجهٔ شگفتی‌آور آن، مسالهٔ ۱۵.K بند ۴.۱۱ را ببینید.]

۵۰.F. درشکل ۶.۵-a، ثابت کنید طول پاره‌خط PR ازطول کمان PQ بیشتر است. ازاین‌جا، نتیجه بگیرید که هر چندضلعی محیط بر دایره، محیطی بیشتر از دایره دارد. [راه دیگر اثبات این حکم این است که نابرابری $L>۲\pi r$ را ثابت کنیم (L، محیط چندضلعی‌محیط بر دایرهٔ به‌شعاع r است). درواقع، مساحت A برای این چندضلعی در رابطه‌های $A=\frac{rL}{۲}$ و $A>\pi r^۲$ صدق می‌کند؛ شکل ۳.۶-b را ببینید. درضمن، این قضیه، حالت خاصی از قضیهٔ کلی‌تر زیر است: اگر ناحیهٔ محدب $R_۱$ درناحیهٔ محدب $R_۲$ واقع باشد، ناحیهٔ محدب $R_۲$ محیطی بیشتر از ناحیهٔ محدب $R_۱$ دارد.]

فصل هفتم

بیضی

۱.۷. نگاشت اصلی. هر بیضی را می‌توان، با انتخاب مناسبی از محورهای مختصات، به‌وسیلهٔ معادلهٔ

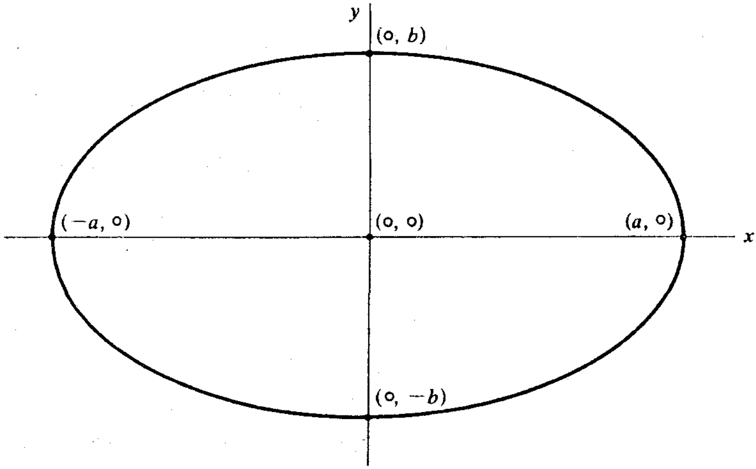
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

نشان‌داد که، درآن، a و b، ثابت‌های مثبت‌اند و بنابرقرارداد $a>b$. نمایش هندسی معادلهٔ (۱) درشکل ۱.۷-a داده شده است. دراین نمودار، مبداء مختصات بر مرکز بیضی‌قرار دارد و، بنابراین، مبداء مختصات، مرکزتقارن بیضی است. درواقع، هرخط راستی‌که ازمرکز بیضی بگذرد، محیط بیضی‌را در دو نقطه‌قطع می‌کندکه ازمرکزآن‌به‌یک‌فاصله‌اند. قطربزرگتربیضی،دونقطهٔ $(-a,0)$ و $(a,0)$؛ وقطرکوچکترآن، دونقطهٔ $(0,-b)$ و $(0,b)$ رابه‌هم وصل می‌کند.

بسیاری ازمساله‌های مربوط به‌بیضی را می‌توان، با تبدیل بیضی به دایره، حل‌کرد. یکی از روش‌های تبدیل بیضی به‌دایره، استفاده از نگاشت است‌که با تبدیل

$$x=aX \quad , \quad y=bY \qquad (2)$$

انجام‌می‌گیرد، که معادله را به‌معادلهٔ $X^2+Y^2=1$ تبدیل می‌کند. واین، معادله دایرهٔ به‌شعاع واحد در دستگاه جدید مختصات XوY است. هرنقطهٔ (x,y) از دستگاه قبلی، به‌نقطهٔ (X,Y) از دستگاه جدید منجر می‌شود. مثلاً، هرخط راست با معادلهٔ $cx+dy+e=0$، در دستگاه جدید، معادله‌ای به‌صورت $caX+dbY+e=0$ خواهد داشت.



شکل ۱۰۷—a

یکی از ویژگی‌های بسیار سودمند نگاشت (۲)، رابطهٔ ساده‌ای است که بین مساحت ناحیه‌ای از صفحهٔ xy بامساحت ناحیهٔ متناظرآن در صفحهٔ XY به‌دست می‌آید. اگرناحیهٔ R ازصفحهٔ xy را با مساحت A و، نگاشت آن، ناحیهٔ R' را درصفحهٔ XY با مساحت A' فرض‌کنیم، آن‌وقت، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد:

$$A=abA' \quad \text{یا} \quad A'=\frac{A}{ab} \qquad (۳)$$

اگر نقطه‌های $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ سه راس یک مثلث باشند، مساحت مثلث را می‌توان با دترمینان زیر به‌دست آورد:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(x_۱y_۲+x_۲y_۳+x_۳y_۱- -x_۱y_۳-x_۲y_۱-x_۳y_۲) \qquad (۴)$$

این مقدار، وقتی مساحت مثلث است که راس‌های آن را، به‌ترتیب،درجهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) در نظر گرفته باشیم، (در حالتی که سه رأس مثلث را به ترتیب، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیریم، برای S، مقداری منفی به‌دست می‌آید).

این مثلث، ضمن نگاشت (۲)، به‌مثلث با راس‌های

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2),\ (X_3, Y_3) \qquad (۵)$$

می‌شود که، در آن، $x_i = aX_i$ و $y_i = bY_i$ $(i = 1, 2, 3)$. مساحت مثلث اخیر، با راس‌های به‌مختصات (۵)، چنین است:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (۶)$$

و دستور (۴) را می‌توانیم به‌این‌صورت بنویسیم:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} aX_1 & bY_1 & 1 \\ aX_2 & bY_2 & 1 \\ aX_3 & bY_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{ab}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[این، از ویژگی دترمینان‌هاست که می‌توان از عامل مشترک، درهر سطر یا هر ستون فاکتور گرفت.] به‌این‌ترتیب، درستی رابطهٔ $A = abA'$ درمورد مثلث، ثابت‌می‌شود. ازآن‌جا که هرچندضلعی را می‌توان به‌مثلث‌هایی‌تقسیم کرد، بنابراین، رابطهٔ (۳) برای مساحت A ازیک چندضلعی در صفحهٔ xy ومساحت A'، نگاشت آن درصفحهٔ XY، برقرار است.

برای ناحیه‌های محصور دریك منحنی هم، می‌توان از چندضلعی‌ها آغازکرد و با روندی شبیه آن‌چه در ۱.۴ دیده‌اید، به‌ناحیه‌های محدود به منحنی رسید. به‌این‌ترتیب، ویژگی (۳) را می‌توان، به‌طورکلی، از چندضلعی‌ها به‌ناحیه‌ها سرایت داد، یعنی ناحیه‌هایی‌که، برای آن‌ها، مساحت تعریف شده باشد.

با استفادهٔ ازاین نتیجه، می‌توانیم مساحت بیضی را از روی مساحت دایره پیدا کنیم. اگر A مساحت محدود به‌بیضی با معادلهٔ (۱) و A' مساحت محدود به‌دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ (دایرهٔ به‌شعاع واحد) باشد، داریم:

$A=abA'$. مساحت دایرهٔ واحد $A'=\pi$ است و بنابراین: $A=ab\pi$. به‌این ترتیب، برای محاسبهٔ مساحت بیضی به‌رابطهٔ $A=ab\pi$ می‌رسیم.

شبیه رابطهٔ $A=abA'$ (بین مساحت‌ها)، رابطه‌ای برای طول پاره‌خط‌های مستقیم وجود ندارد. مسالهٔ زیر، شما را به این موضوع، قانع خواهد کرد:

پاره‌خطی که دو نقطهٔ $(\circ,\circ)$ و $(a,\circ)$ را درصفحهٔ xy به‌هم وصل می‌کند، طولی برابر a دارد. نگاشت (۲)، این نقطه‌ها را به‌نقطه‌های $(\circ,\circ)$ $(1,\circ)$ درصفحهٔ XY منتقل می‌کند که، پاره‌خط واصل بین آن‌ها، طولی برابر واحد دارد. بنابراین، در نگاشت(۲)، بستگی سادهٔ $L=aL'$ بین طول پاره‌خط L ونگاشت آن L' به‌نظر می‌رسد. اکنون، دونقطهٔ $(\circ,\circ)$ و $(\circ,b)$ را در دستگاه xy درنظر بگیرید که طولی برابر b دارد. نگاشت (۲)، این دونقطه را به‌نقطه‌های $(\circ,\circ)$ و $(\circ,1)$ تبدیل می‌کند که طولی برابر واحد پیدا می‌کنند. پاره‌خط بـه‌طول b، درنگاشت (۲)، به‌پاره‌خطی به‌طول واحد تبدیل شده است، درحالی که درمثال قبلی، همین نگاشت، پاره‌خط به‌طول a را به پاره‌خطی به طول واحد تبدیل کرده بود. ازآن‌جا که $a\neq b$، بنابراین رابطه‌ای بین طول پاره‌خط‌های نظیر، شبیه بستگی بین مساحت‌ها، وجود ندارد.

G۰۱. بافرض $a>b>\circ$. آیا نگاشتی مانند $x=aX$، $y=bY$ پیدا می‌شود که خط‌های راست موازی در صفحهٔ xy را، به‌خط‌های راست موازی درصفحهٔ XY تبدیل کند؟ آیا چنین نگاشتی می‌تواند خط‌های راست عمود برهم درصفحهٔ xy را به‌خط‌های راست عمود برهم در صفحهٔ XY تبدیل کند؟

G۰۲. چهار نقطه ازمحیط یك بیضی، راس‌های یك مستطیل‌اند. ثابت کنید، ضلع‌های این مستطیل، بامحورهای بیضی موازی‌اند.

۲۰۷. معادله‌های پارامتری: معادله‌های

$$x=a\cos\theta\,,\qquad y=b\sin\theta \tag{1}$$

را، معادله‌های پارامتری بیضی

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱ \qquad (۲)$$

گویند، درواقع، ازمعادله‌های (۱) به‌دست می‌آید: $\frac{x}{a}=\cos\theta$ و $\frac{y}{b}=\sin\theta$
و، بنابراین، به‌سادگی، به‌معادلهٔ (۲) می‌رسیم. وقتی θ، همه مقدارهای از $\theta=۰$ تا $\theta=۲\pi$ را قبول کند، نقطه‌های (x,y) درمعادله‌های (۱)، دقیقاً برنقطه‌های بیضی (۲) منطبق می‌شود. مثلاً $\theta=۰$ و $\theta=۲\pi$، نقطهٔ $(a,۰)$ و $\theta=\frac{\pi}{۲}$، نقطهٔ $(۰,b)$ را مشخص می‌کنند. زاویهٔ متغیر θ راپارامتر می‌نامند، به‌همین مناسبت، معادله‌های (۱) را، معادله‌های پارامتری بیضی گویند.

برای کسانی که بامختصات قطبی آشنا هستند، یادآوری این نکته لازم است که، دراین‌جا، θ همان معنای مربوط به‌مختصات‌قطبی را ندارد. مثلاً، برای $\theta=\frac{\pi}{۴}$ (یا ۴۵ درجه)، از معادله‌های (۱) به‌نقطه‌ای با مختصات $\left(\frac{a}{\sqrt{۲}},\frac{b}{\sqrt{۲}}\right)$ می‌رسیم و چون $a\neq b$، این دو مختص باهم برابر نیستند؛ یعنی، این‌نقطه روی خط راستی نیست که از مبداء مختصات می‌گذرد و با محور طول زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد به‌زبان دیگر، این‌نقطه، محل برخورد بیضی باخط $x=y$ درناحیهٔ اول مختصات نیست.

۳.۷. چندضلعی‌های محاط دربیضی. این مساله، دراغلب کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده می‌شودکه: حداکثر مساحت مستطیل محاط دربیضی به‌معادلهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ را پیدا کنید. وقتی‌که، مساله، به‌این‌صورت طرح شود، چندان هم ساده نیست، چرا که صحبت برسرهمهٔ

مستطیل‌های محاط در بیضی است و این پرسش را پیش می‌آورد که: آیا مستطیلی محاط در بیضی وجود دارد که ضلع‌هایش موازی محورهای بیضی نباشند؟ البته، پاسخ این پرسش منفی است (مسالهٔ G.۲ در ۱.۷ را ببینید). در بعضی از کتاب‌ها، برای کنار کشیدن از این پرسش، مساله را محدودتر طرح می‌کنند، به‌این‌صورت: «از بین همه مستطیل‌های قابل محاط در بیضی مفروض، که ضلع‌هایی موازی محورهای بیضی داشته باشند، مساحت کدام یک ماکزیمم است؟»

هدفی که در این‌جا دنبال می‌کنیم، حل مسالهٔ کلی‌تری است:

چهار نقطه بر محیط بیضی مشخص کنید، به نحوی که مساحت چهارضلعی به‌راس‌های این چهار نقطه، حداکثر مقدار ممکن باشد.

از این گونه چهارضلعی‌ها، بی‌نهایت نوع پیدا می‌شود که یکی از آن‌ها مستطیل است. اگر بخواهیم، باز هم مسالهٔ کلی‌تری را مطرح کنیم، باید به‌جای ۴ نقطه، n نقطه روی محیط بیضی در نظر بگیریم و، به‌جای چهارضلعی، به‌مسالهٔ حداکثر مساحت nضلعی بپردازیم.

قضیهٔ ۳.۷ـa. از بین همهٔ چهارضلعی‌های محاط در بیضی به‌معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$، بی‌نهایت چهارضلعی وجود دارد که بیشترین مساحت $۲ab$ را دارند. این چهارضلعی‌ها به‌راس‌های

$$(\pm a\cos\theta,\ \pm b\sin\theta)\ ,\quad (\pm a\cos\theta,\ \pm b\sin\theta) \qquad (۱)$$

هستند که، در آن‌ها، $۰\leqslant\theta<\frac{\pi}{۲}$ و، درضمن، علامت بالا باهم و علامت‌های پایین باهم‌اند.

یادداشت. می‌توانستیم برای θ محدودیتی قایل نشویم. علت این‌که θ را با شرط $۰\leqslant\theta<\frac{\pi}{۲}$ محدود کرده‌ایم این است که از تکرار جواب‌ها جلوگیری کنیم. مثلاً به‌ازای $\theta=۰$، از (۱)، چهار نقطه به‌دست می‌آید: $(\pm a،۰)$ و $(۰،\pm b)$. همین چهار نقطه، به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ، $\theta=\pi$ و

$\theta=\frac{3\pi}{2}$ هم به‌دست می‌آید.

به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{4}$، چهار نقطهٔ (۱) چنین‌اند:

$$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2)$$

این چهارنقطه، یك مستطیل را مشخص می‌کنند و این، تنها مستطیلی است که ازبین چهارضلعی‌های (۱) به‌دست می‌آید. [اثبات این‌حکم را، به‌عنوان یك‌مساله، درپایان همین بند آورده‌ایم.]

اثبات قضیهٔ ۳.۷-a بسیار ساده است، با استفاده از نگاشت $x=aX$، $y=bY$، بیضی ما، منجر به‌دایرهٔ $X^2+Y^2=1$ می‌شود. چهار نقطهٔ P، Q، R و S ازمحیط بیضی، به‌نقطه‌های P'، Q'، R' و S' از محیط دایره نگاشته می‌شوند. مساحت‌های دوچهارضلعی $PQRS$ و $P'Q'R'S'$، با رابطهٔ $A=abA'$ به‌هم مربوط‌اند.

بنابراین، به‌جای‌جست‌وجوی ماکزیمم مساحت A می‌توان ماکزیمم مساحت A' راپیدا کرد. بنابرقضیهٔ ۳.۶-b، مساحت A' ازچهارضلعی $P'Q'R'S'$ که‌در دایرهٔ $X^2+Y^2=1$ محاط شده، وقتی‌ماکزیمم‌است که، این‌چهارضلعی، مربع باشد، برای این منظور می‌توان، P' را نقطهٔ متغیری با مختصات $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ انتخاب‌کرد و، سپس، برای Q'، R'، S' درنظر گرفت:

$$(-\sin\theta, \cos\theta),\ \ (-\cos\theta, -\sin\theta),\ \ (\sin\theta, -\cos\theta)$$

و به‌سادگی قابل‌تحقیق است که این چهارنقطه، راس‌های یك‌مربع را روی دایره تشکیل می‌دهند. P' متغیر است، ولی برای دوری جستن ازتکرار جواب‌ها، می‌توان مقدار θ را با نابرابری $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ محدودکرد.

به‌این‌ترتیب، P'، روی محور xها و یا در ربع اول دستگاه محورهای مختصات واقع می‌شود.

اکنون، تبدیل $x=aX$ و $y=bY$، ما را به نقطه‌های (x, y) می‌رساند که مختصات آن‌ها در دستور (۱) صدق می‌کنند.

روشن است، همین بحث را می‌توان درمورد nضلعی‌های محاط در بیضی هم انجام داد، زیرا درهرحال، مسالهٔ مربوط به nضلعی محاط دربیضی، به مسالهٔ nضلعی محاط در دایره منجر می‌شود. به‌این‌ترتیب، می‌توانیم قضیه کلی‌تر زیر را مطرح کنیم:

قضیهٔ ۳.۷–b. دربین nضلعی‌های محاط دربیضی $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$، بی‌نهایت بیضی با مساحت ماکزیمم وجود دارد. در واقع، برای هرنقطهٔ دلخواه P ازمحیط بیضی، می‌توان یك nضلعی با مساحت ماکزیمم به‌دست آورد، به‌نحوی که P یکی از راس‌های آن باشد.

اگرمختصات نقطهٔ P را $(a\cos\theta , b\sin\theta)$ بگیریم، راس‌های nضلعی به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$\left(a\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right) , b\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \qquad (3)$$

$(k=1, 2, 3, \dots, n-1)$. درحالت $a=b$، نقطه‌های (۳)، راس‌های یك nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحدند.

اثبات این قضیه، کاملاً شبیه قضیه ۲.۷–a است و بنابراین، ازتفصیل آن می‌گذریم.

G.۳. ثابت کنید، چهارنقطه‌ای که از (۱) به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید، چهار راس یك مستطیل‌اند و برای مقدارهای دیگر θ از بازهٔ $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$، این چهارنقطه، چهار راس یك متوازی‌الاضلاع‌اند.

G.۴. حداکثر مساحت مثلث محاط دربیضی $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ چقدر است؟ حداکثر مساحت nضلعی محاط دراین بیضی چقدر است؟

۴.۷. چند ضلعی‌های محیطی. مسالهٔ مربوط به‌چندضلعی محیط بر بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ با می‌نیمم مساحت را هم می‌توان به‌مسالهٔ متناظر خود در دایره تبدیل کرد. باید از نگاشت $x=aX$ و $y=bY$ درمورد بیضی استفاده کرد که‌ما را به‌دایرهٔ $X^2+Y^2=1$ وهرخط مماس‌بربیضی را، به‌خط‌مماسی براین دایره می‌رساند.

یك خط راست می‌تواند با بیضی دو نقطهٔ مشترك یا یك نقطهٔ مشترك داشته باشد و یا با بیضی نقطهٔ مشترکی نداشته باشد. خط راست، وقتی بر بیضی مماس است که، با آن، تنهادریك نقطه‌مشترك باشد. بنابراین، نگاشت $x=aX$، $y=bY$، بیضی را به‌دایره تبدیل می‌کند و خط راستی را که با بیضی تنها در یك نقطه مشترك است، به‌خط راستی تبدیل می‌کند‌که بادایره تنها در یك نقطه مشترك، یعنی برآن مماس است.

به‌این‌ترتیب، مسالهٔ پیدا کردن nضلعی با حداقل مساحت محیط بر بیضی، به‌مسالهٔ پیدا کردن nضلعی محیط بر دایره با حداقل محیط منجر می‌شود، که درقضیهٔ ۳.۶ــc به‌آن پرداخته‌ایم. بنابراین، قضیهٔ‌کلی زیر را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۴.۷ــa. در بین nضلعی‌های محیط بربیضی با معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، بی‌نهایت nضلعی با مساحت حداقل وجود دارد.

برای هرنقطهٔ دلخواه P واقع برمحیط بیضی، یك n ضلعی محیطی با حداقل مساحت وجود دارد، به‌نحوی‌که P نقطهٔ تماس یکی ازضلع‌های آن با بیضی باشد. اگر مختصات P را $(a\cos\theta ، b\sin\theta)$ بگیریم، نقطه‌های تماس ضلع‌های دیگر nضلعی، به‌این‌صورت‌اند:

$$\left(a\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right), b\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \qquad (1)$$

که درآن، $k=1,2,3,\ldots,n-1$.

۵.۷. خط‌های مماس و مقدارهای اکسترمم. از مساله‌ای آغاز می‌کنیم که، برخلاف ظاهر آن، رابطهٔ تنگاتنگی با خط‌های مماس دارد.

مسالهٔ ۱. اگر c و d عددهای ثابتی باشند، حداقل و حداکثر مقدار عبارت $cx+dy$ را، به‌ازای نقطه‌های واقع برمحیط بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ پیدا کنید.

حل. اگر معادلهٔ پارامتری بیضی، یعنی $x=a\cos\theta$، $y=b\sin\theta$ را درنظر بگیریم [بند ۲.۷ را ببینید]، مساله به‌این جا منجر می‌شود که ماکزیمم و می‌نیمم عبارت $ac\cos\theta+bd\sin\theta$ را ازبین همهٔ مقدارهای متغیر θ پیدا کنیم. در بند ۵.۵ ثابت کردیم که اکسترمم‌های $A\sin\theta+B\cos\theta$ برابرند با $\sqrt{A^2+B^2}$ و $-\sqrt{A^2+B^2}$، که اگر به جای A و B، به‌ترتیب، bd و ac قرار دهیم، حداکثر و حداقل مقدار عبارت $cx+dy$، به‌ازای نقطه‌های واقع برمحیط بیضی، به‌دست می‌آیند:

$$\sqrt{a^2c^2+b^2d^2} \text{ و } -\sqrt{a^2c^2+b^2d^2} \qquad (1)$$

اگر این مساله را برای حالت دایره درنظر بگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم که بیشترین و کمترین مقدار عبارت $cx+dy$، به‌ازای نقطه‌های واقع برمحیط دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$، به‌ترتیب برابرند با

$$a\sqrt{c^2+d^2} \text{ و } -a\sqrt{c^2+d^2} \qquad (2)$$

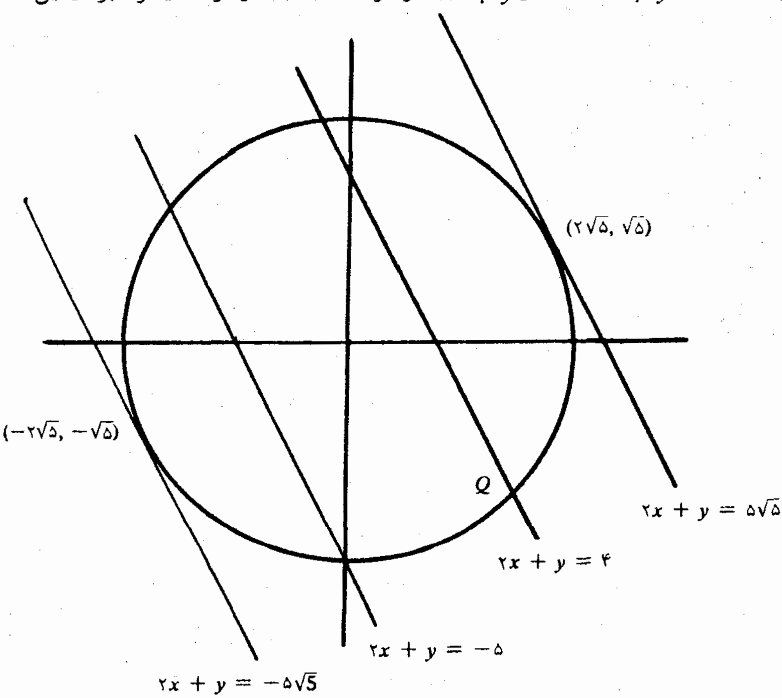
که ازهمان‌مقدارهای (۱)، به‌ازای $a=b$، به‌دست می‌آیند ($a>0$ درنظر گرفته شده است).

این راه‌حل، اگرچه کوتاه وساده است، ازنظر هندسی کمبودی دارد: نقطه یا نقطه‌های واقع برمحیط را ـ که درآن‌ها، عبارت $cx+dy$ به‌ماکزیمم یا می‌نیمم مقدار خود می‌رسد ـ به‌ما نمی‌دهد. برای رفع این کمبود، مساله را به‌نحو دیگری مطرح می‌کنیم.

مسالهٔ ۲. بیشترین و کمترین مقدارعبارت $2x+y$ را، برای نقطه‌های واقع برمحیط دایرهٔ $x^2+y^2=25$، پیدا کنید. این مقدارهای ماکزیمم و

می‌نیمم، درچه نقطه‌هایی ازمحیط دایره به‌دست می‌آیند؟

بنابر (۲)، بیشترین و کمترین مقدار عبارت $۲x+y$، برابر $۵\sqrt{۵}$ و $-۵\sqrt{۵}$ است. برای این که ببینیم، این‌مقدارها، درچه‌نقطه یا نقطه‌های محیط دایره به‌دست می‌آیند، به‌طریق زیر عمل می‌کنیم. دسته‌خط‌های راست موازی باهم $۲x+y=k$ را، برای مقدارهای مختلف k، درنظرمی‌گیریم وآن‌ها را «خط‌های تراز» می‌نامیم. چهارتا از این خط‌های راست در شکل a-۵.۷ نشان‌داده شده‌اند. دراین‌چهارمورد، k را به‌ترتیب برابر $-۵\sqrt{۵}$، -۵، ۴ و $۵\sqrt{۵}$ گرفته‌ایم وقتی k افزایش می‌یابد، ومثلاً از $k=-۵$ به $k=۴$ می‌رسد. «خط تراز» به‌سمت راست حرکت می‌کند به‌روشنی معلوم است که، درنقطهٔ Q، محل برخورد خط راست $۲x+y=۴$ با دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$، مقدار $۲x+y$ برابراست با ۴. ازطرف دیگر، برای‌این که



شکل a-۵.۷

به‌بیشترین مقدار $2x+y$ روی دایرهٔ $x^2+y^2=25$ برسیم، باید از بین «خط‌های تراز»، سمت راست‌ترین آن‌ها را در نظر بگیریم که با دایره نقطهٔ مشترکی داشته باشد، یعنی خط راست مماس بر دایره را. درضمن، می‌دانیم، این بیشترین مقدار برای $2x+y$، برابر است با $5\sqrt{5}$؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ این خط مماس، به‌صورت $2x+y=5\sqrt{5}$ درمی‌آید.

اکنون روشن است که، برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ تماس، باید دستگاه شامل معادله‌های $2x+y=5\sqrt{5}$ و $x^2+y^2=25$ را حل کنیم. $y=5\sqrt{5}-2x$ را درمعادلهٔ $x^2+y^2=25$ قرار می‌دهیم:

$$x^2+(5\sqrt{5}-2x)^2=25 \Rightarrow 5x^2-20\sqrt{5}x+100=0 \quad (2)$$

این معادلهٔ درجهٔ دوم را، می‌توان به‌صورت $5(x-2\sqrt{5})^2=0$ نوشت که، ازآن‌جا، $x=2\sqrt{5}$ و سپس، $y=\sqrt{5}$ به‌دست می‌آید. بیشترین مقدار $2x+y$، درنقطه‌های واقع برمحیط دایرهٔ $x^2+y^2=25$، در نقطهٔ $(2\sqrt{5}، \sqrt{5})$ ظاهرمی‌شود. به‌همین ترتیب می‌توان روشن کرد که کمترین مقدار عبارت $2x+y$، درنقطهٔ $(-2\sqrt{5}، -\sqrt{5})$ ازمحیط دایره به‌دست می‌آید.

با اندکی دقت در جنبهٔ هندسی این استدلال، به‌این نتیجه می‌رسیم که باید در جست‌وجوی خط‌مماس بردایره یا بیضی باشیم.

قضیهٔ ۷.۵–a. ضریب زاویهٔ مماس بربیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ $(r، s)$، برابر است با $-\frac{b^2r}{a^2s}$، به‌جز در دونقطهٔ $(\pm a، 0)$ دراین دو نقطه، یعنی در دو انتهای قطر بزرگتر، خط‌مماس موازی با محور yهاست؛ برای این دوخط، معادله‌های $x=\pm a$ به‌دست می‌آید که ضریب زاویهٔ آن‌ها «بی‌نهایت» است. درحالت $a=b$، بیضی به‌دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ تبدیل می‌شود وضریب زاویهٔ مماس برآن درنقطهٔ $(r، s)$ برابر است با $-\frac{r}{s}$.

دیدیم که نگاشت $x=aX$ و $y=bY$، مماس بربیضی را به‌مماس بردایره تبدیل می‌کند. به‌همین مناسبت، بحث‌خود را روی‌دایرهٔ $X^2+Y^2=1$ انجام

می‌دهیم. نقطهٔ (r, s) از بیضی، متناظر است با نقطهٔ $\left(\frac{r}{a}, \frac{s}{b}\right)$ از دایره. ضریب زاویه مماس بر دایره را، با معلوم بودن نقطهٔ تماس، به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد. چون شعاع وارد به‌نقطهٔ تماس، برخط مماس عمود است، ابتدا ضریب زاویهٔ خط‌راستی را که از $(0, 0)$ و نقطهٔ $\left(\frac{r}{a}, \frac{s}{b}\right)$ می‌گذرد، پیدا می‌کنیم. این ضریب زاویه برابر است با $\frac{sa}{rb}$ و، بنابراین، ضریب زاویه مماس بر دایره در نقطهٔ (r, s) برابر $-\frac{rb}{sa}$ می‌شود (حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های دو خط راست عمود برهم، برابر است با -1).

اکنون، برای این‌که ضریب زاویهٔ خط‌راست متناظر با این‌خط را در صفحهٔ xy به‌دست آوردیم، باید به‌این پرسش پاسخ دهیم: اگر خط راستی درصفحهٔ XY، ضریب زاویه‌ای برابر m داشته باشد، ضریب زاویهٔ خط راست متناظر آن درصفحهٔ xy چقدر است؟

خط‌راست $Y = mX + k$ را، باضریب زاویهٔ m، درصفحهٔ XY در نظر می‌گیریم. اگر نگاشت $x = aX$، $y = aY$ را به صورت $X = \frac{x}{a}$ و $Y = \frac{b}{y}$ به‌کار بریم، معادلهٔ خط‌راست به‌صورت $\frac{y}{b} = \frac{mx}{a} + k$ و یا $y = \frac{mb}{a}x + kb$ درمی‌آید که ضریب زاویه‌ای برابر $\frac{mb}{a}$ دارد. به‌این‌ترتیب، اگر خط‌راستی در صفحهٔ XY، ضریب زاویه‌ای برابر m داشته باشد، ضریب زاویهٔ خط‌راست متناظر آن درصفحهٔ xy، برابر $\frac{mb}{a}$ می‌شود. ازاین‌جا نتیجه می‌گیریم که ضریب زاویهٔ $-\frac{rb}{sa}$ درصفحهٔ XY، برای خط‌راست متناظری که در صفحهٔ

xy واقع‌است، به‌ضریب زاویه‌ای برابربا $-\frac{rb^{۲}}{sa^{۲}} = \left(\frac{-rb}{sa}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right)$ تبدیل می‌شود.

ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی وکاربرد آن در مساله‌های مربوط به اکسترممم‌ها، از موضوع‌های اصلی بحث درکتاب‌های مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. روشی‌که دراین‌جا، برای پیدا کردن ضریب زاویهٔ مماس بربیضی، درقضیهٔ ۵.۷-a، مورد استفاده قرارگرفت، خاص بیضی است ونمی‌توان ازآن، برای منحنی‌های دیگر استفاده‌کرد؛ درحالی‌که روش‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، روش‌هایی‌کلی هستند و آن‌ها رامی‌توان درمورد هرتابع مشتق‌پذیر به‌کار برد.

باهمهٔ این‌ها، پیش ازآن‌که از این موضوع بگذریم، توجه خواننده‌را به‌روش دیگری، برای به‌دست آوردن معادلهٔ خطراست مماس بر منحنی‌های درجه دوم جلب می‌کنیم. منحنی‌های درجهٔ دوم، همان مقطع‌های مخروطی هستند: دایره، بیضی، سهمی وهذلولی. روش موردنظر را با مثالی در مورد هذلولی، شرح می‌دهیم.

مسالهٔ ۳. ضریب زاویه خط راست مماس برمنحنی $xy = ۱۲$ را، در نقطهٔ (۴،۳) پیدا کنید.

حل. خط راست مماس برمنحنی $xy = ۱۲$ درنقطهٔ (۴،۳)، منحنی‌را درنقطهٔ دیگری قطع‌نمی‌کند. (این‌حکم، درمورد هرمنحنی درجه‌دومی‌درست است). معادلهٔ خطراستی را می‌نویسیم‌که ازنقطهٔ (۴،۳) بگذرد و ضریب زاویه‌ای برابر m داشته باشد:

$$y - ۳ = m(x - ۴) \Rightarrow y = mx - ۴m + ۳$$

اگرمعادلهٔ این‌خط راست را بامعادلهٔ منحنی‌حل‌کنیم، (درمعادلهٔ $xy = ۱۲$ به‌جای y، مقدار آن را $mx - ۴m + ۳$ قرار دهیم)، به‌معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$mx^{۲} + (۳ - ۴m)x - ۱۲ = ۰ \qquad (۴)$$

این معادله، درحالت کلی دو ریشه دارد که، یکی ازآن‌ها $x = ۴$ است و به m بستگی ندارد. آیا می‌توان m را طوری پیدا کرد که، این معادله، به‌جز $x = ۴$، ریشهٔ دیگری نداشته باشد؟ پاسخ به‌این پرسش مثبت است. درواقع، باید ترتیبی بدهیم که $x = ۴$، ریشهٔ مضاعف معادله باشد. برای این‌که معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، ریشهٔ مضاعف داشته‌باشد، باید مبین آن، $b^۲ - ۴ac$، برابر صفر شود، و درمورد معادلهٔ (۴):

$$(۳ - ۴m)^۲ + ۴۸m = ۰ \implies ۱۶m^۲ + ۲۴m + ۹ = ۰$$

که‌ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $m = -\frac{۳}{۴}$، که همان‌ضریب زاویهٔ مطلوب‌است.

G·۵۰. با روش مسالهٔ ۳، ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی $x^۲ - ۴y - ۲۸ = ۰$ را درنقطهٔ $(۴، -۳)$ پیدا کنید.

۶.۷. کوتاه‌ترین فاصله از یك نقطه تا یك‌منحنی. با درك شهودی می‌توان حدس زد که، اگر نقطهٔ Q واقع برمنحنی، نزدیك‌ترین نقطهٔ منحنی به‌نقطهٔ P باشد، پاره‌خط راست PQ، برمماسی که درنقطهٔ Q برمنحنی رسم شود، عمود است. نقطه‌ای از منحنی C که کوتاه‌ترین فاصله را تانقطهٔ P داشته باشد، به‌این‌معناست که در نقطه برخورد منحنی C با دایره‌ای قرار دارد که مرکزآن نقطهٔ P وشعاع آن کوچکترین شعاع ممکن باشد. چنین دایره‌ای برمنحنی C مماس است و، درنتیجه، دایره ومنحنی C، درنقطهٔ تماس خود، Q، مماس مشترك دارند.

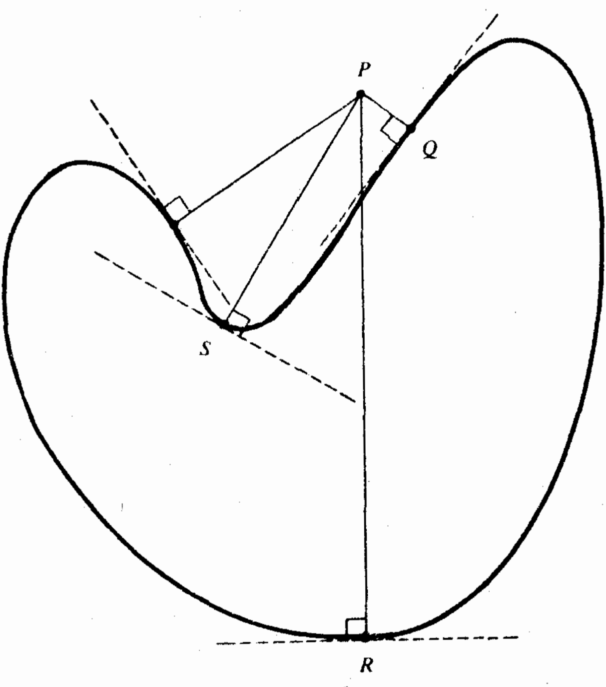
به‌همین‌ترتیب، اگر R را نقطه‌ای ازمنحنی بگیریم که، برای‌آن‌فاصلهٔ PR حداکثر مقدار ممکن باشد، پاره خط‌راست PR، برخط راست مماس بر منحنی درنقطهٔ R عمود است. این ویژگی، تنها درمنحنی‌هایی وجود دارد که ناحیهٔ محدودی ازصفحه را محصور می‌کنند (مثل منحنی شکل ۶.۷-a). علاوه براین بحث ما تنها درمورد منحنی پیوسته است، به‌نحوی که، برای هر نقطهٔ منحنی، خط‌راست مماس وجود داشته باشد، درشکل ۶.۷-a، پاره‌خط PS هم، برخط راست مماس برمنحنی در نقطهٔ S عمود است، ولی

این پاره‌خط را نمی‌توان، فاصلهٔ حداکثر یا حداقل نقطهٔ P ازمنحنی C دانست.

خط راستی مانند PQ را (درشکل ۶.۷-a)، که در نقطهٔ برخورد با منحنی، برمماس درآن نقطه عمود است، قائم برمنحنی گویند: قائم برمنحنی درنقطهٔ Q برای هرنقطه ازمنحنی خط راست قائمی وجود دارد که بر مماس برمنحنی درهمان نقطه عمود است.

باوجودی که، برای پیدا کردن ماکزیمم و می‌نیمم فاصلهٔ یك نقطه، از منحنی، می‌توان ازاین ویژگی استفاده کرد، دراین‌جا، حق تقدم را به روش‌های جبری (فصل‌دوم) می‌دهیم. ازاین‌روش دربند ۴.۳ استفاده کردیم، به‌خصوص در مسالهٔ ۴ درمتن کتاب و درمسالهٔ ۲۵.C. این دو مساله را می‌توان حالت‌های خاصی ازمساله‌های بخش حاضر دانست.

عکس ویژگی بالا، درمورد ماکزیمم و می‌نیمم فاصله‌های یك‌نقطه از



شکل ۶.۷-a

یک منحنی، برقرار نیست. اگر پاره‌خط PQ برخط راست مماس برمنحنی در نقطهٔ Q عمود باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که PQ، بیشترین یا کمترین فاصلهٔ نقطهٔ P از منحنی را نشان می‌دهد (شکل ۶.۷-a را ببینید)، راه‌حل دوم مساله‌ای که در زیر حل خواهیم کرد، این موضوع را روشن می‌کند.

مسالهٔ ۱. نقطه‌هایی را برمنحنی $\frac{x^۲}{۱۰۰}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱$ پیدا کنید که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ $(۰,۹)$، بیشترین یا کمترین مقدار ممکن باشد.

حل. مساله را با دو روش حل می‌کنیم. در راه حل اول، از روش جبری (شبیه فصل دوم) استفاده می‌کنیم.

نقطهٔ (x,y) را روی منحنی فرض می‌کنیم. فاصلهٔ این نقطه تانقطهٔ $(۰,۹)$ چنین است:

$$(x-۰)^۲+(y-۹)^۲=x^۲+y^۲-۱۸y+۸۱=(۱۰۰-۴y^۲)+$$
$$+y^۲-۱۸y+۸۱=۱۸۱-۳(y^۲+۶y)$$

حداکثر این مقدار، به‌ازای حداقل $y^۲+۶y$ به‌دست می‌آید. حداقل‌عبارت $y^۲+۶y$، به‌ازای $y=-۳$ حاصل‌می‌شود که، در نتیجه، نقطه‌های $(۸,-۳)$ و $(-۸,-۳)$ واقع برمنحنی، دورترین نقطه‌های منحنی از نقطهٔ $(۰,۹)$ هستند.

برای پیدا کردن نقطه یانقطه‌هایی ازمنحنی که نزدیکترین نقطه به نقطهٔ $(۰,۹)$ باشند، باید حداکثر مقدار $y^۲+۶y$ را به‌دست آورد. این عبارت، به‌خودی خود، ماکزیمم ندارد، ولی دراین جا، y به‌معنای عرض نقطه‌ای از بیضی است و، بنابراین، باید باشرط $-۵\leqslant y\leqslant ۵$ سازگار باشد؟ و روشن است که ماکزیمم عبارت $y^۲+۶y$، باشرط $-۵\leqslant y\leqslant ۵$، به‌ازای $y=۵$ ظاهر می‌شود که متناظر با نقطهٔ $(۰,۵)$ ازمنحنی است: نقطهٔ $(۰,۵)$، نزدیک‌ترین نقطه ازمنحنی، به‌نقطهٔ $(۰,۹)$ است.

همین مساله را می‌توانستیم به‌این ترتیب حل کنیم: نقطهٔ (x,y) را روی‌منحنی طوری پیدا می‌کنیم که، خط راست‌مماس برمنحنی در نقطهٔ (x,y)، برپاره‌خطی که از دونقطهٔ $(۰,۹)$ و (x,y) می‌گذرد، عمود باشد. بنابرقضیهٔ

a-۵.۷، ضریب زاویهٔ خط‌راست مماس برمنحنی $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$، در نقطهٔ (x,y)، برابـر است با $-\frac{25x}{100y}$ یا $-\frac{x}{4y}$، ضریب زاویهٔ خـط‌راستی که از دونقطهٔ $(0,9)$ و (x,y) می‌گذرد، برابر است با $\frac{y-9}{x}$. درمورد دوخط راست عمود برهم، حاصل‌ضرب زاویه‌ها برابراست با -1 (به‌جز در مورد خط‌های راست موازی محورهای مختصات). بنابراین

$$\frac{-x}{4y}\cdot\frac{y-9}{x}=-1 \Rightarrow \frac{y-9}{4y}=1 \Rightarrow y=-3$$

که به‌ازای آن، به‌نقطه‌های $(8,-3)$ و $(-8,-3)$ ازبیضی می‌رسیم.

علاوه‌براین، بایدحالت‌هایی را درنظر بگیریم، که، این دوخط‌راست، موازی محـورهـای مختصـات بـاشند، نقطـهٔ (x,y) روی بیـضی است ($-5\leqslant y\leqslant 5$)، بنابراین خطی که از دونقـطهٔ $(0,9)$ و (x,y) بگذرد، نمی‌تواند بامحور xها موازی‌باشد. ولی این خط‌راست، درحالتی که (x,y) یکی از دو نقطهٔ $(0,5)$ یا $(0,-5)$ باشد بر محور yها منطبق است (این خط راست، از دو انتهای قطربزرگتر بیضی می گذرد). به‌این‌ترتیب، ازنقطهٔ $(0,9)$، چهار قائم می‌توان نسبت به‌بیضی $\frac{x^{2}}{100}+\frac{y^{2}}{25}=1$ رسم کرد.

مختصات پای این قائم‌هـا چنین‌اند: $(8,-3)$، $(-8,-3)$، $(0,5)$ و $(0,-5)$. فاصلهٔ نقطهٔ $(0,9)$ ازهرکـدام ازاین نقطه‌ها، به‌ترتیب، برابر است‌با $\sqrt{208}$، $\sqrt{208}$، ۴ و۱۴. بزرگترین این‌فاصله‌ها $\sqrt{208}$ وکوچکترین آن‌ها ۴ است. بنابراین، نزدیك‌ترین نقطهٔ‌بیضی به‌نقطهٔ $(0,9)$، نقطهٔ$(0,5)$ و دورترین نقطهٔ‌بیضی به$(0,9)$، نقطه‌های$(-8,-3)$ و$(8,-3)$هستند.

نقطهٔ $(0,-5)$، با آن‌که روی قائم بر بیضی‌که از $(0,9)$ رسم شده قرار دارد، هیچ ربطی به‌فاصلهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم ندارد.

G.۶۰ نقطه‌هایی را روی محیط بیضی $x^{2}+2y^{2}=2$ پیدا کنیدکه،

نسبت به نقطهٔ (۳،۰)، بیشترین یا کمترین فاصله را داشته باشند.

G.۷. نقطه یا نقطه‌هایی را برمنحنی $\frac{x^{۲}}{۲۵}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$ پیدا کنید که نزدیک‌ترین نقطهٔ بیضی به نقطهٔ $(k،۰)$ باشند (k، عدد ثابت مثبتی است).

G.۸. کدام نقطه ازمنحنی $xy^{۲}=۵۴$، به‌مبداء مختصات نزدیک‌تر است؟

G.۹. نقطه یا نقطه‌هایی از هذلولی $۲x^{۲}-y^{۲}=۲$ را پیدا کنید‌که به‌نقطهٔ (۳،۰) نزدیک‌ترین باشند؛ به‌نقطهٔ (۶،۰) نزدیک‌ترین باشند.

G.۱۰. بافرض $a>b>۰$، دونقطه بربیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ پیدا کنید، که حداکثر فاصله را از یکدیگر داشته باشند (استدلال کنید).

یادداشت. اگر تصور می‌کنید، پاسخ این مساله روشن است و نیازی به‌استدلال ندارد، بهتر است به‌مسالهٔ بعد توجه کنید. نمودار $\left|\frac{x}{a}\right|^{r}+\left|\frac{y}{b}\right|^{r}=۱$ را، درحالت کلی و برای $r\geqslant ۲$، در نظر بگیرید (به‌ازای $r=۲$، تبدیل به‌بیضی‌می‌شود). نمودار این‌معادله، وقتی r بزرگ شود، درمجاورت نقطه‌های $(a،۰)$و$(-a،۰)$ پیازی‌شکل‌می‌شود. وقتی r را بزرگ وبزرگتر بگیریم، نمودار این‌معادله به‌سمت‌مستطیلی نزدیک می‌شود که باچهار نقطهٔ $(\pm a،\pm b)$ مشخص می گردد. درحالت $r=۲$، بزرگترین فاصلهٔ بین دونقطه ازنمودار برابر است با $۲a$، ولی برای $r>۲$، این‌فاصله از $۲a$ تجاوز می کند. درحساب دیفرانسیل و انتگرال، و به‌کمک‌ضریب‌های لاگرانژ، می‌توان این مطلب را به‌سادگی و روشنی توضیح داد.

G.۱۱. حداکثر فاصلهٔ بین دونقطه ازمنحنی $\frac{x^{۴}}{a^{۴}}+\frac{y^{۴}}{b^{۴}}=۱$ را پیدا کنید.

۷.۷. نقطه‌های اکسترمم در بیضی. می‌خواهیم بالاترین و پایین‌ترین نقطه را دراین بیضی پیدا کنیم:

$$2x^2+2xy+y^2+4x+4-14=0 \qquad (1)$$

یعنی می‌خواهیم دو نقطه بر بیضی پیدا کنیم که یکی بزرگترین مقدار ممکن عرض و دیگری کمترین مقدار ممکن عرض را داشته باشد.

معادلهٔ (۱) را به‌صورت یک معادلهٔ درجه دوم، نسبت به x، منظم می‌کنیم:

$$2x^2+2x(y+2)x+y^2+4y-14=0$$

که به کمک آن، می‌توان x را برحسب y پیدا کرد:

$$x=\frac{1}{2}\left[-y-2\pm\sqrt{-y^2-4y+32}\right] \qquad (2)$$

اگر هر دو جواب را باهم درنظر بگیریم، معادلهٔ (۲) با معادلهٔ (۱) هم‌ارز است: هر نقطه‌ای که مختصات آن درمعادلهٔ (۱) صدق کند، الزاماً دریکی از دو مجموعهٔ جواب (۲) قرار دارد و برعکس. بنابراین، برای پیدا کردن نقطه‌هایی از بیضی، می‌توانیم مقدارهای عددی برای y درنظر بگیریم و، به کمک (۲)، مقدارهای متناظر x را پیدا کنیم. مثلاً اگر $y=0$ بگیریم، از(۲) به‌دست‌می‌آید: $y=-1\pm2\sqrt{2}$. ولی روشن‌است، تنهامقدارهایی از yرا می‌توان انتخاب‌کرد که، به‌ازای آن‌ها، مقدار $-y^2-4y+32$ غیرمنفی باشد. داریم:

$$-y^2-4y+32=(8+y)(4-y)$$

یعنی، برای غیرمنفی بودن این‌عبارت، باید داشته باشیم: $-8\leqslant y\leqslant 4$. بنابراین، بیشترین مقدار ممکن برای y، برابراست با $y=4$ و کمترین مقدار ممکن برای‌آن: $y=-8$. اگر این دومقدار را در (۲) قرار دهیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید: $x=3$ و $x=-3$. به‌این‌ترتیب، نقطهٔ با بزرگترین عرض روی بیضی، نقطهٔ $(-3,4)$ ونقطهٔ با کوچکترین عرض، نقطهٔ $(3,-8)$ است.

ازهمین روش می‌توان، درحالت کلی، استفاده‌کرد و نقطه‌های با

بزرگترین و کوچکترین عرض را روی بیضی دلخواه زیر پیدا کرد:

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+k=0 \qquad (3)$$

به‌دست‌آوردن چنین دستوری دشوار نیست، با وجود این، آن را پیدا می‌کنیم.

برای این‌که، معادلهٔ (۳)، معرف یک بیضی باشد، (و یا درحالت خاص، دایره)، باید داشته باشیم:

$$a>0\,,\quad b>0\,,\quad ac-b^2>0 \qquad (4)$$

البته، برای بیضی بودن معادلهٔ (۳)، این‌شرط‌ها کافی نیستند، برای این‌که (۳)، یك بیضی باشد، k نباید خیلی بزرگ باشد. برای توضیح این‌مطلب، خود را درگیر پیدا کردن یك دستور نمی‌کنیم؛ به‌مسالهٔ زیر توجه کنیم:

مساله. به‌ازای چه‌مقدار ثابتی از k، معادلهٔ

$$F(x,y)=x^2-2xy+2y^2-10x+4y+k=0 \qquad (5)$$

I. دارای بی‌نهایت‌جواب (x,y) درمجموعهٔ‌عددهای حقیقی است، به‌نحوی که نمودار (۵) یك بیضی باشد. II. تنها دارای یك جواب باشد. یعنی نمایش هندسی (۵)، تنها شامل یك‌نقطه باشد. III. دارای جواب نباشد، یعنی نمودار(۵)، مجموعه‌ای تهی باشد؟ درحالت II، مختصات نقطهٔ‌منفرد را پیدا کنید.

حل. شبیه مساله قبل، دراین‌جا هم، نقطه‌هایی را روی نمودار (۵) جست‌وجو می‌کنیم‌که دارای بزرگترین و کوچکترین‌مختص y باشند. معادلهٔ (۵) را نسبت به x حل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x=y+5\pm\sqrt{-y^2+6y+25-k} \qquad (6)$$

عبارت زیر رادیکال را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}-y^2+6y+25-k&=-y^2+6y-9+34-k\\&=-(y-3)^2+34-k \qquad (7)\end{aligned}$$

این عبارت باید غیرمنفی باشد و این، وقتی ممکن است که داشته باشیم: $۳۴-k>۰$. بنابراین، پاسخ پرسش I به صورت $k<۳۴$ درمی‌آید. در حالت $k=۳۴$، عبارت (۷)، به $-(y-۳)^۲$ تبدیل می‌شود که به‌جز برای $y=۳$، منفی است؛ یعنی جواب پرسش II ، عبارت است از $k=۳۴$. در این حالت، معادلهٔ (۵)، تنها شامل یک نقطهٔ (۸،۳) است. سرانجام، روشن است که معادلهٔ(۶) و درنتیجه معادلهٔ(۵)، برای $k>۳۳$، ریشهٔ حقیقی ندارد.

G۱۲۰. بر بیضی به‌معادلهٔ $۲x^۲+۲xy+y^۲+۴x+۴y-۱۴=۰$ نقطه‌ای پیدا کنید که بزرگترین مختص x یا کوچکترین مختص x را داشته باشد.

G۱۳۰. مختصات مرکز این بیضی را پیدا کنید:

$$۲y^۲-۱۰x+x^۲-۲xy+۴y+۹=۰$$

[از این مطلب استفاده کنید که، مرکز بیضی، وسط پاره‌خط راست است که دو نقطهٔ با کمترین و بیشترین y را به‌هم وصل می‌کند.]

فصل هشتم

زنبورهای عسل و شش‌ضلعی‌های آن‌ها

۱۰۸. دو مساله. شانهٔ عسل در داخل کندو، از دیرباز مورد توجه انسان بوده است؛ فیلسوفان بزرگی مثل ارسطو، آن را مورد تحسین قرار داده‌اند وزیست‌شناسانی مثل رنه‌ره‌ئومور (Rene Reaumur) فرانسوی، به‌مطالعه وتجزیه وتحلیل آن پرداخته‌اند. شاعران ونویسندگان، ازسازمان دقیق وشگفتی آوری که‌درساختن شانه‌های عسل وجمع‌آوری‌عسل‌وجود دارد، ستایش کرده‌اند:

For where's the state beneath the firmament
That doth excel the bees for government?*

وچون، برای تهیهٔ یک‌پوند عسل،متجاوز ازبیست‌هزار بارپرواز لازم است، تلاش حیرت‌آور زنبور عسل مورد تمجید واقع شده است:

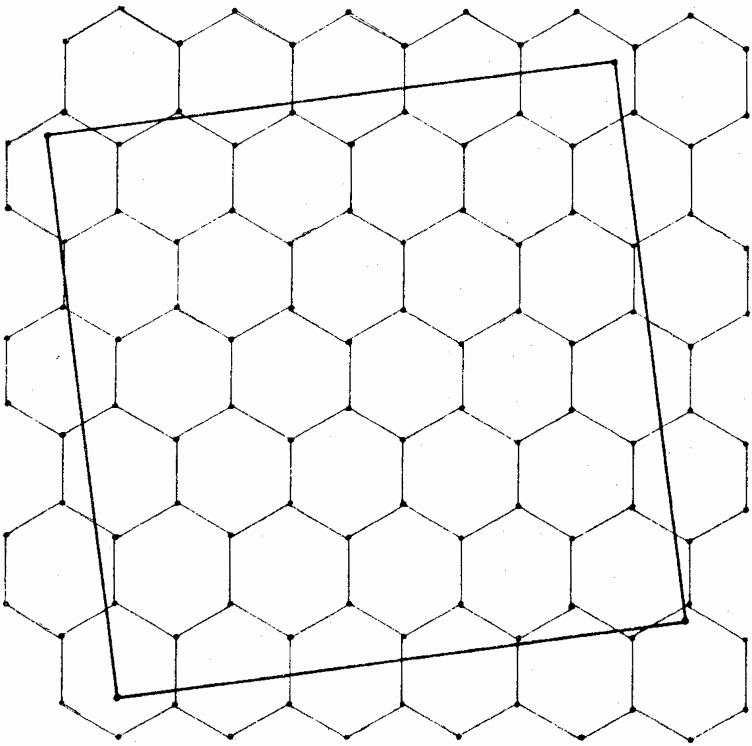
How doth the busy little bee
Improve each shining hour**

ریاضی‌دانان، مجذوب ساختمان هندسی شانه‌های عسل شده‌اندکه شامل تعداد زیادی حجره‌اند و مقطع عرضی آن‌ها، به‌صورت شش‌ضلعی‌های منتظم درمی‌آید. شش‌ضلعی منتظم دارای این ویژگی است‌که می‌توان‌صفحه را، به‌کمک آن‌ها، «فرش»کرد (شکل ۱۰۸-a). [مربعی را که درشکل می‌بینید، فعلاً درنظر نگیرید، ولی بعداً به‌آن نیاز داریم.] یک‌چندضلعی را

---

*) کدامین دولت، زیر گنبد دواراست،
که بهتر اززنبورعسل، حکومت کند؟

**) زنبور کوچولو، چقدر باید تلاش کند،
تا این نتیجه درخشان به‌دست آید.



شکل ۱۰۸-a

«سنگ‌فرش» یا «موزائیک» می‌گوییم، وقتی‌که بتوان صفحه را با کنارهم گذاشتن آن‌ها «فرش» کرد، بدون‌این که‌شکافی وجود داشته باشد ویاقطعه‌های «سنگ‌فرش» برهم سوار شده باشند.

پاپوس اسکندرانی دربارهٔ چنان شکل‌های هندسی مطالعه‌کرده است که می‌توانستند، احتمالاً، جانشین شش‌ضلعی‌های کندوی عسل بشوند. او می‌گوید:

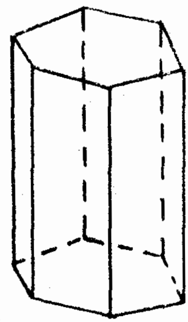
سه‌شکل مستوی وجود داردکه برای این منظور مفیدند، منظورم شکل‌هایی است که ضلع‌ها و زاویه‌های برابر داشته باشند. ولی، زنبورها، هیچ‌کدام ازاین شکل‌ها را دراختیار نداشتند... زنبورها،

به‌طور غریزی، ازمیان‌سه‌شکلی که می‌توانند صفحه را پر کنند، شکلی را برای ساختن شانه‌های کندوی عسل انتخاب کردند که بهترین‌زاویه را داشت؛ آن‌ها متوجه شدند که، این‌شکل، بیشتر از دو شکل‌دیگر می‌تواند عسل را درخود جمع کند. زنبورها به‌درستی به‌این‌حقیقت پی بردند که، به‌ازای مقدار مساوی مواد برای ساختن شکل‌های مختلف (مثلث، مربع، شش‌ضلعی)، شش‌ضلعی بیش‌ازشکل‌های دیگر گنجایش عسل دارد و این، به‌نفع زنبورها بود.

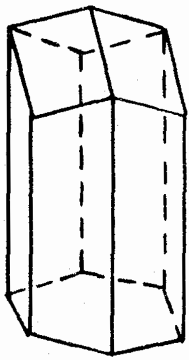
دراین فصل کوشش می‌کنیم به‌این پرسش پاسخ دهیم که، چرا پاپوس برای این موقعیت خاص، تنها سه‌شکل را که منتظم هم باید باشند، در نظر می‌گیرد؟ بنابراین، دراین فصل، به چندضلعی‌های نامنتظم هم خواهیم پرداخت. در ضمن، همراه با تلاش‌های پاپوس، فرض را براین می‌گیریم که زنبورهای عسل، با «هنر» و «دوراندیشی هندسی» خود، به‌این ساختمان منتظم رسیده‌اند و، براین پایه، امکان‌های مشابهی را بررسی خواهیم کرد که، زنبورهای عسل، قبل‌از انتخاب شش‌ضلعی‌ها به‌عنوان مقطع عرضی‌ساختمان کندوی خود، از آن‌ها صرف‌نظر کرده‌اند.

به‌این‌ترتیب، بحث ما دراین فصل، مربوط است که به‌همهٔ نوع‌های چندضلعی که بتوان، با آن‌ها، صفحه را «فرش» کرد؛ درضمن، می‌خواهیم خود را به‌چنان چندضلعی برسانیم که بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی را داشته‌باشد. دراین‌فصل، به‌این نتیجه خواهیم رسید که، شش‌ضلعی منتظم، این بزرگترین نسبت‌هم‌پیرامونی‌را دارد و، بنابراین نتیجه‌خواهیم گرفت که، زنبورهای‌عسل، بهترین نوع ساختمان را برای حداکثر ذخیرهٔ عسل، با کمترین مواد لازم برای ساختمان آن، انتخاب کرده‌اند.

بحث ما به‌مقطع عرضی ساختمان‌کندوی عسل، محدود می‌شود، همان‌طور که درمورد شش ضلعی‌های منتظم، درشکل ۱.۸-a دیده می‌شود. درشانه‌های کندوی‌عسل، هرحجره، منشور قائمی است با قاعده‌های‌شش‌ضلعی سه‌بعدی (شکل۱.۸-b). بنابراین، دراین‌جا، این مساله هم مطرح می‌شود که سرپوش حفره چگونه باید باشد تا ستون منشوری، بیشترین حجم را، به‌ازای مقدار موم ثابت برای ساختن‌آن، داشته باشد! زنبورعسل، این



شکل ۱۰۸–b



شکل ۱۰۸–c

سرپوش‌ها را به‌وسیلهٔ سه‌لوزی مساوی می‌سازد (شکل ۱۰۸–c) که در داخل با زاویهٔ ۱۲۰ درجه یکدیگر را قطع می‌کنند و، همین شکل «سرپوش‌ها»، حداکثر حجم را می‌دهد. ولی، ازآن‌جا که دراین‌جا، به‌مساله‌های سه‌بعدی کاری نداریم، به‌آن نخواهیم پرداخت.*

۲۰۸. سنگ‌فرش با چندضلعی‌های منتظم. در این بند و دوبند بعدی، دربارهٔ «سنگ‌فرش» صفحه باچندضلعی‌ها صحبت می‌کنیم. ابتدا چندضلعی‌های منتظم، سپس‌چندضلعی‌های مقعر وسرانجام، چندضلعی‌های‌محدب‌درحالت‌کلی. درواقع، باموضوعی‌بسیار گسترده‌سرو کار داریم‌ومادراین‌جاناچاریم، به‌صورتی کوتاه، تنهااز نکته‌های‌مهم واساسی‌یادکنیم. علاوه برآن، دراین‌مورد، هنوز داستان به‌پایان خودنرسیده‌است ومساله‌های حل‌نشدهٔ بسیاری، وجود دارد.

همان‌طور که پاپوس، بـه‌درستی، گفته است، تنها سه‌نـوع چندضلعی منتظم وجود داردکه می‌توانند برای «فرش‌کردن» صفحه، به‌کار گرفته‌شوند؛ این سه‌نـوع چندضـلعی منتظم، عبارتنداز مثلث متساوی‌الاضـلاع، مربع و شش‌ضلـعی منتظم. البته بـاید تـوجـه داشت که، دراین‌جـا، صحبت برسر «فرش‌کردن» صفحه باشکل‌های‌منتظم قابل‌انطباق است، یعنی‌همهٔ‌چندضلعی‌ها،

---

*) برای آشنائی بیشتر با شکل حجره‌های شانه‌های کندوی عسل ومحاسبه‌های مربوط به‌آن، می‌توانید به‌کتاب «در پی فیثاغورث» ترجمهٔ پرویزشهریاری، صفحه‌های ۳۹۱ تا ۳۹۸ مراجعه‌کنید.م.

یك شکل و برابرند، شبیه‌شکل ۸.۱ــa، که با شش‌ضلعی‌های منتظم‌هم‌نهشت، صفحه را «فرش» کرده‌ایم، درك این مطلب‌هم ساده‌است که می‌توان، صفحه را با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت ویا بامربع‌های هم‌نهشت هم«فرش» کرد.

این که، چند ضلعی منتظم دیگری وجود ندارد که بتوان به کمك آن، صفحه را پوشاند، به‌سادگی و باتوجه به زاویه‌های داخلی آن‌ها، ثابت می‌شود. راس‌های nضلعی منتظم را P_1، P_2، ...، P_n می‌نامیم. ضلع P_1P_2 را ازطرف P_2، ضلع P_2P_3 را از طرف P_3، ...، و بالاخره، ضلع P_1P_n را ازطرف P_1، اندکی امتداد می‌دهیم، n زاویهٔ خارجی nضلعی به‌دست‌می‌آید. اگر اندازهٔ یکی از زاویه‌های داخلی چندضلعی را θ بگیریم، اندازهٔ هریك‌از زاویه‌های خارجی برابر $180^\circ - \theta$ می‌شود. مجموع n زاویهٔ خارجی، برابر است با ۳۶۰ درجه:

$$n(180^\circ-\theta)=360^\circ \Rightarrow \theta=180^\circ-\frac{360^\circ}{n} \qquad (1)$$

اگر از nضلعی‌های منتظم هم‌نهشت، برای «فرش کردن»صفحه استفاده شود، باید در هر راس، زاویه‌ها دقیقاً باهم جفت شوند، به‌نحوی‌که درآن‌جا، هیچ شکافی وجود نداشته باشد. اگر دریك راس «فرش»، k مرتبه ازضلع‌های nضلعی‌ها استفاده شده باشد، آن‌وقت، باید داشته باشیم: $k\theta=360^\circ$. مثلاً درشکل ۸.۱ــa، در هر راس، سه شش‌ضلعی باهم جفت شده‌اند، بنابراین $3\theta=360^\circ$ یا $\theta=120^\circ$. اگر این مقدار θ را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $n=6$.

اگر به‌جای θ دربرابری $k\theta=360^\circ$، مقدار آن را از برابری (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$k\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right)=360^\circ \Rightarrow k\left(1-\frac{2}{n}\right)=2$$

این برابری را می‌توان به‌صورت‌های مختلف نوشت، ازجمله

$$k(n-2)=2n, \quad (k-2)(n-2)=4$$

۴ باید بر $n-۲$ بخش‌پذیر باشد؛ ولی ۴، تنها بر عددهای مثبت ۱، ۲ و ۴ بخش‌پذیر است و بنابراین، تنها می‌توانیم داشته باشیم:

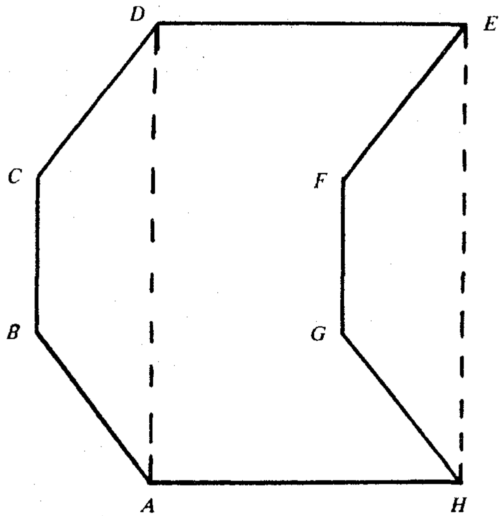
$$n-۲=۱ \quad \text{یا} \quad n-۲=۲ \quad \text{یا} \quad n-۲=۴$$

که درنتیجه به‌دست می‌آید: $n=۳$ یا $n=۴$ یا $n=۶$. به‌این‌ترتیب، حکم مطلوب ثابت می‌شود.

به‌این‌ترتیب، برای ساختن کندوی عسل، زنبورها تنها می‌توانند از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، مربع‌ها و یا شش‌ضلعی‌های منتظم استفاده کنند. ازمیان این سه شکل، شش‌ضلعی منتظم، بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی را دارد؛ یعنی، شش‌ضلعی‌های منتظم، بهترین نامزد ازبین چندضلعی‌های منتظم، برای ساختمان کندوی عسل است.

۳.۸. چندضلعی‌های مقعر. در بند بعد خواهیم دید که صفحه‌را، نمی‌توان به‌کمك چندضلعی‌های محدب هم‌نهشتی که هفت‌ضلع یا بیشتر دارند، «فرش» کرد. ولی درمورد چندضلعی‌های مقعر، وضع به‌گونهٔ دیگری است. درشکل ۳.۸ـa، یك هشت‌ضلعی مقعر دیده می‌شود که می‌توان، به‌کمك آن، صفحه را «فرش» کرد (هشت‌ضلعی $ABCDEFGH$). پاره‌خط‌های راست DE و AH موازی و برابر یکدیگرند وچهارضلعی‌های $ABCD$ و $HGFE$ هم‌نهشت‌اند. اگر پاره‌خط‌های راست AD و HE را رسم کنیم، مستطیل $ADEH$ به‌دست می‌آید؛ این مستطیل، فرورفتگی $HGFE$ از هشت‌ضلعی را پر و بخش $ABCD$ از آن را، حذف می‌کند. درضمن، مستطیل $ADEH$، مساحتی برابر با مساحت هشت‌ضلعی ومحیطی کمتراز محیط آن دارد، درنتیجه، نسبت هم‌پیرامونی درمستطیل $ABEH$، بزرگتر از نسبت‌هم‌پیرامونی برای‌هشت‌ضلعی $ABCDEFGH$ است. علاوه‌براین، روشن است که، هر مستطیلی، برای «فرش کردن» صفحه، مناسب است.

به‌این‌ترتیب، دربین چندضلعی‌های منتظم و چندضلعی‌های مقعری که برای «فرش کردن» صفحه مناسب‌اند، شش ضلعی منتظم، بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی را دارد. تنها این مطلب باقی می‌ماندکه چندضلعی‌های محدب



شکل ۳۰۸-a

را هم مورد مطالعه قرار دهیم.

۴۰۸. «فرش» با چندضلعی‌های محدب. از هرمثلث دلخواهی‌می‌توان، برای «فرش کردن» صفحه استفاده کرد. همین حکم، دربارهٔ هرچهارضلعی دلخواه هم درست است. اثبات این مطلب را، ضمن مساله‌های بعدی، به‌عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم. برخی از پنج‌ضلعی‌های محدب (و البته، نه‌همهٔ آن‌ها)، برای «فرش کردن» صفحه مناسب‌اند؛ به‌همین‌ترتیب درمورد شش‌ضلعی‌های محدب، مسالهٔ مربوط به‌شش‌ضلعی‌های محدبی‌که برای سنگ‌فرش مناسب باشند، کاملاً حل شده است، ولی مسالهٔ مشابه آن، برای پنج‌ضلعی‌های محدب، هنوز به‌طورکامل حل نشده است.

نمونه‌ای از شش‌ضلعی‌های محدب، که برای «فرش کردن» صفحه مناسب‌اند، شش‌ضلعی منتظم است. به‌کمك همین شش‌ضلعی منتظم، می‌توان نمونه‌ای از پنج‌ضلعی محدب را، که برای «فرش کردن» صفحه قابل استفاده باشد، به‌دست آورد. برای این منظور، کافی است مثلاً وسطهای دوضلع

روبه‌رو از شش‌ضلعی منتظم را، با پاره‌خط راستی، به‌هم وصل کنیم، دراین‌صورت، شش‌ضلعی مفروض، به دو پنج‌ضلعی هم‌نهشت تبدیل می‌شود که برای «فرش‌کردن» صفحه مناسب‌اند. ولی، همان‌طور که گفتیم، هنوز این مساله حل نشده است که، یک پنج‌ضلعی محدب دلخواه، با چه‌شرطهایی می‌تواند برای «فرش‌کردن» صفحه، مورد استفاده قرار گیرد.

یکی ازهدف‌های این‌فصل، اثبات قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ ۸.۴–a. به‌ازای $n \geqslant 7$، نمی‌توان یک nضلعی محدب پیدا کرد که، برای «فرش‌کردن» صفحه، مناسب باشد.

دراین‌جا، این قضیه را، تنها درحالتی ثابت می‌کنیم که«سنگ‌فرش» راس به‌راس یا پهلو به‌پهلو باشد، یعنی دو آجری که در «فرش» صفحه‌به‌کار رفته‌اند و دریک نقطه مشترک‌اند. I. تنها در یک نقطه، که همان راس آجر است، مشترک باشند، یا II. در یک پاره‌خط، ضلع آجر، مشترک باشند. حالت کلی، تفاوت عمده‌ای با این‌حالت‌های خاص ندارد، باوجود این، ما به‌آن نمی‌پردازیم.

سنگ‌فرش «پهلو به‌پهلو» را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، از nضلعی محدب P برای فرش‌کردن صفحه استفاده‌کرده باشیم $(n \geqslant 7)$؛ محیط nضلعی P، را واحد طول می‌گیریم ومساحت آن را با A نشان می‌دهیم. در صفحه‌ای که با آجرهای هم‌شکل و هم‌نهشت P پر شده است، دستگاه محورهای‌مختصات را انتخاب می‌کنیم و S_r را مربعی می‌گیریم که‌مختصات چهار راس‌آن $(\pm r، \pm r)$ (هر چهارترکیبی که ازعلامت‌ها حاصل می‌شود) باشد؛ منظور از S_r، هم نقطه‌های درونی و هم‌نقطه‌های روی محیط مربع است. r را عددی مثبت و به‌اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم.

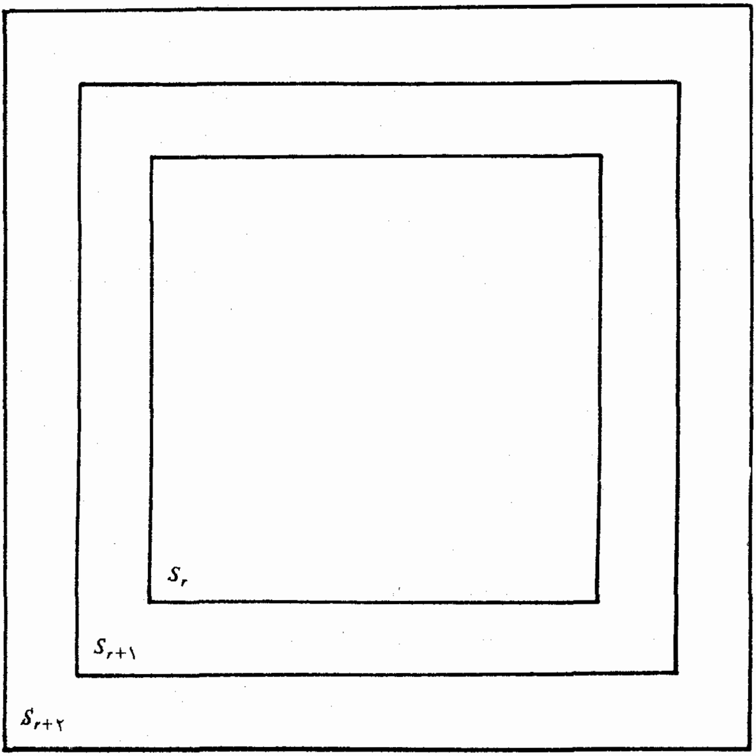
[شکل ۸.۱–a می‌تواند، در این‌باره، تصوری به ما بدهد. مربعی که روی شکل رسم شده است، همان S_r است. تنها عیب این‌شکل درآن‌جاست که صفحه را با شش‌ضلعی‌ها پوشانده‌ایم، درحالی که، درقضیهٔ ما، چندضلعی P باید بیش‌از شش‌ضلع داشته باشد $(n \geqslant 7)$. اگر می‌توانستیم نمونه‌ای برای nضلعی P با $n \geqslant 7$ رسم کنیم، به معنای نادرستی حکم قضیه بود.

به‌هرحال، شکل ۱.۸-a، همراه با اندکی تصور، برای بحث ما کفایت می‌کند.]

همچنین، ازمربع‌های S_{r+1} و S_{r+2} هم (که بازهم شامل نقطه‌های درونی خود نیز هستند) استفاده می‌کنیم. مختصات راس‌های این مربع‌ها، چنین است (شکل ۴.۸-a):

$$(\pm(r+1), \pm(r+1)) \quad \text{و} \quad (\pm(r+2), \pm(r+2))$$

N_1 را مجموعهٔ چندضلعی‌هایی می‌گیریم، که شامل نقطه‌های درونی خود و، دست‌کم، در یک نقطه با S_r مشترک باشند. همچنین، N_2، مجموعهٔ چندضلعی‌هایی است که، دست‌کم، دریك نقطه با S_{r+1} مشترك‌اند. در شکل



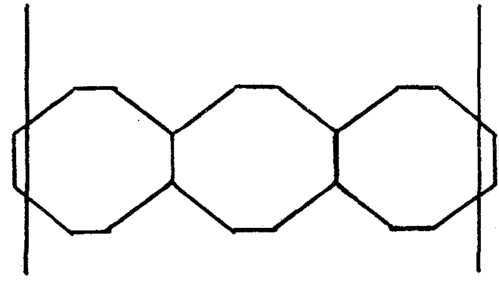
شکل ۴.۸-a

۸.۴-a، دو پاره‌خط قائمی که از نقطه‌های $(r, ०)$ و $(r+۱, ०)$ می‌گذرند، بخشی از محیط مربع‌هـای S_r و $S_{r+۱}$ را تشکیل می‌دهند. در این شکـل، از چندضلعی‌هـای مناسب برای «فرش»، سه تـا نشان داده شده است. هـر سه چندضلعی به $N_۲$ تعلق دارند، ولی تنها یکی از آن‌ها، (آن که درسمت چپ است)، به $N_۱$ متعلق است. فاصلهٔ بین دوخـط راست قائـم، برابر است با واحد؛ درضمن، محیط هریك ازچند ضلعی‌ها هـم، برابر واحد است. ازآن‌جا که محیط هریك از چندضلعی‌ها برابر واحد است، بنابراین، فاصلهٔ هردو نقطهٔ دلخواه، از یك چندضلعی، کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ مـی‌شود. بـه‌این تـرتیب، هـمـهٔ چندضلعی‌های متعلق به $N_۱$، در داخل $S_{r+۱}$ قرار دارند، ولی آن‌را به‌طور کامل نمی‌پـوشانند. به‌همین ترتیب، همهٔ چند ضلعی‌های متعلق به $N_۲$، در داخل $S_{r+۱}$ واقع‌اند. درنتیجه، به‌این زنجیره از بستگی‌ها می‌رسیم:

$$S_{r+۲} \supset N_۲ \supset S_{r+۱} \supset N_۱ \supset S_r \qquad (۱)$$

هرناحیه، شامل ناحیهٔ بعدی است.

اکنون، مساحت‌های این پنج ناحیه را، با هم مقایسه می‌کنیم. تعداد چندضلعی‌های P، متعلق بـه $N_۱$ را با $|N_۱|$ و تعداد چندضلعی‌هـای متعلق به $N_۲$ را بـا $|N_۲|$ نشان می‌دهیم. بنابـرایـن، مساحت‌هـای $N_۱$ و $N_۲$، به‌ترتیب، برابر $A|N_۱|$ و $A|N_۲|$ می‌شود. چون مساحت مربع S_r برابر است با $۴r^۲$، بنابراین، باتوجه به (۱)، داریم:



شکل ۸.۴-b

$$۴(r+۲)^۲ > |N_۲|A \geqslant ۴(r+۱)^۲ > |N_۱|A \geqslant ۴r^۲ \qquad (۲)$$

تعداد راس‌های واقع درشبکهٔ $N_۱$ را، به‌شرطی که هر راس را تنها یکبار به‌حساب‌آوریم، برابر v می‌گیریم و این دونابرابری را ثابت می‌کنیم:

$$۲v \geqslant (n-۲)|N_۱| \quad و \quad n|N_۲| \geqslant ۳v \qquad (۳)$$

ابتدا ثابت‌می‌کنیم، نابرابری‌های (۳)، بانابرابری‌های (۲) متناقض‌اند. اگر نابرابری‌های (۳) را، به‌ترتیب، در $۳A$ و $۲A$ ضرب کنیم و، سپس، آن‌ها را باهم مقایسه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲nA|N_۲| \geqslant ۳(n-۲)A|N_۱|$$

که اگر آن را با (۲) مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$۸n(r+۲)^۲ > ۲nA|N_۲| \geqslant ۳(n-۲)A|N_۱| \geqslant ۱۲(n-۲)r^۲$$

اگر دراین زنجیره نابرابری‌ها، دو عبارت وسط را کنار بگذاریم، باتقسیم دوطرف بر ۴ و بسط $(r+۲)^۲$، به‌دست می‌آید:

$$۸nr + ۸n > (n-۶)r^۲$$

n، عددی است درست، مثبت وبزرگتراز ۶، بنابراین، این نابرابری، برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ r (ومثلاً، برای $r = ۸n+۱$) نادرست است. تناقض نابرابرهای (۳) با نابرابری‌های (۲)، به‌معنای درستی حکم قضیهٔ ۴.۸-a است.

برای تکمیل اثبات، باید نابرابری‌های (۳) را ثابت کنیم. مجموع زاویه‌های داخلی nضلعی P، برحسب رادیان، برابر است با $(n-۲)\pi$ و، بنابراین، مجموع همهٔ زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های موجود در $N_۱$، برابر $(n-۲)\pi|N_۱|$ می‌شود. ازطرف‌دیگر، در هر راس v ازشبکهٔ $N_۱$، زاویه‌ای برابر ۲π وجود دارد. بنابراین، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های موجود در $N_۱$، از $۲v\pi$ بیشتر نیست (زیرا ممکن است همهٔ زاویه‌های مربوط به‌یال‌هایی ازمجموعهٔ $N_۱$، که دربیرون قرار گرفته‌اند، در زاویه‌های

داخلی شرکت نداشته باشند. درنتیجهٔ $|N_۱|(n-۲)\pi \geqslant ۲v\pi$ که، ازآن‌جا، نابرابری اول (۳) به‌دست می‌آید.

برای اثبات نابرابری $n|N_۲| \leqslant ۳v$، تعداد راس‌های شبکهٔ $N_۲$ را تخمین می‌زنیم. هریك از $|N_۲|$ چندضلعی شبکه، دارای n راس است؛ بنابراین $n|N_۲|$، مضربی است از تعداد راس‌ها در $N_۲$؛ زیرا هر راس به‌بیشتر ازیك چندضلعی تعلق‌دارد و، بنابراین، بیش‌از یکبار به‌حساب آمده است. درواقع، هریك‌از v راس، ازچندضلعی‌های شبکهٔ $N_۱$، دست کم، سه‌باردرنظر گرفته‌شده‌است (در واقع، هریك‌ازچندضلعی‌های $N_۱$ یکی ازچندضلعی‌های $N_۲$ است، زیرا $N_۱$، شامل تمامی‌بخش $S_{r+۱}$ است. علاوه براین، هریك‌ازراس‌های‌چندضلعی‌های $N_۲$ دست کم، متعلق به‌سه‌چندضلعی $N_۲$ است، که بنا به‌فرض، چندضلعی‌های P محدب‌اند). به‌این‌ترتیب $n|N_۲| \leqslant ۳v$؛ و اثبات (۳) کامل می‌شود.

H.۱۰ ثابت کنید، هر مثلثی می‌تواند برای «فرش کردن» صفحه مورد استفاده قرار گیرد.

H.۲۰ ثابت کنید، صفحه را می‌توان به‌کمك‌هرچهارضلعی، اعم‌ازاین‌که محدب باشد یا مقعر، فرش کرد.

۵.۸. خلاصهٔ مطلب. از آن‌چه در سه بند قبلی آوردیم، می‌توان نتیجه گرفت: ازبین همهٔ چندضلعی‌هایی‌که برای «فرش‌کردن» صفحه مناسب‌اند، شش‌ضلعی منتظم، بیشترین نسبت هم‌پیرامونی را دارد، یعنی دارای بیشترین مساحت، با محیط مفروض است. قضیهٔ ۴.۸-a نشان دادکه، برای «فرش کردن صفحه» نمی‌توان از چندضلعی‌هایی استفاده کردکه تعداد ضلع‌های‌آن، برابر یا بیشتراز v باشد، دربند ۳.۸ دیدیم که با چندضلعی‌های مقعر، احتمال پوشاندن‌صفحه وجود دارد، ولی درهرحال، می‌توان چندضلعی محدبی‌با نسبت هم‌پیرامونی بزرگتر، برای پوشاندن صفحه پیدا کرد. [درست است‌که‌اثبات را، به‌کمك یك‌مسالهٔ خاص انجام دادیم، ولی می‌توان آن را تعمیم داد]. می‌ماند چندضلعی‌هایی‌که با ۳، ۴، ۵ و ۶ ضلع باشند. دربندهای ۲.۳ و ۳.۳ ثابت کردیم که، دربین مثلث متساوی‌الاضلاع و در بین چهارضلعی‌ها،

مربع دارای بیشترین نسبت هم‌پیرامونی است. درقضیهٔ ۵.۳-a، نتیجهٔ مشابهی برای شش‌ضلعی‌ها گرفتیم. همچنین، درقضیهٔ ۲.۶-a روشن کردیم که، نسبت هم‌پیرامونی برای nضلعی‌ها، با افزایش n، بزرگتر می‌شود.

و اما دربارهٔ پنج‌ضلعی‌های محدب؟ درقضیهٔ ۲.۴-b ثابت شدکه، در بین همهٔ پنج‌ضلعی‌ها، پنج‌ضلعی منتظم، بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی را دارد. ولی، اثبات این که، یك پنج‌ضلعی با نسبت هم‌پیرامونی بزرگتر وجود دارد، به‌فصل دوازدهم موکول می‌شود. البته، برای هر پنج‌ضلعی، یك شش‌ضلعی با نسبت هم‌پیرامونی بزرگتر وجود دارد (مسالهٔ ۳.H) و این می‌تواند به‌اثبات کامل مطلب کمك کند، بدون این که به‌فصل دیگری مراجعه کنیم.

۳.H. یك پنج‌ضلعی محدب مفروض است. ثابت کنید، یك‌شش‌ضلعی محدب با نسبت هم‌پیرامونی بزرگتر وجود دارد. [شش‌ضلعی محدب را، با بریدن مثلث متساوی‌الساقین کوچکی دریکی از راس‌های پنج‌ضلعی، به‌دست آورید.]

یادداشت. می‌توان حالتی کلی‌تر را درنظر گرفت و ثابت کردکه: برای هر چندضلعی محدب‌مفروض، چندضلعی محدب دیگری با یك‌ضلع بیشتروجود داردکه دارای نسبت هم‌پیرامونی بزرگتری باشد.

فصل نهم

نتیجه‌های اضافی در هندسه

۱.۹.مقدمه. این فصل، ادامهٔ فصل سوم است، به‌جزاین‌که دراین‌جا، با مساله‌هایی کلی‌تر و دشوارتر سروکار داریم. بیشتر مساله‌های این فصل، به‌مثلث مربوط می‌شوندکه برخی از آن‌ها کاملاً مشهورند، مثل مسالهٔ فرما و مسالهٔ فاگنانو (Fagnano) در بندهای ۲.۹ و ۳.۹ درفصل گذشته، با استدلال جالبی، که از رادماخر (Radermacher) بود، دربارهٔ منطقه‌های محدب مستقیم‌الخط بحث کردیم. این بحث، قضیه‌هایی را دربارهٔ منطقه‌های محدب مطرح می‌کندکه‌ما، دراین‌جا، به‌اثبات آن‌ها نپرداختیم. ولی خوشبختانه، این قضیه‌ها، پذیرفتنی هستند و، ازنظرشهودی، اشکالی به‌وجود نمی‌آورند.

۲.۹. مسالهٔفرما. مسالهٔفرما، که‌اغلب آن‌را مسالهٔ شتاینر(Steiner) هم می‌گویند، چنین‌است: درصفحهٔ مثلث ABC، نقطهٔ P را طوری پیداکنید که مجموع فاصله‌های آن از سه راس مثلث، یعنی $PA+PB+PC$، کمترین مقدار ممکن باشد. در ادبیات ریاضی، به‌این مساله، مسالهٔ فرودگاه هم می‌گویند: می‌خواهیم، برای سه‌شهر A، B و C ـ که در یک دشت قرار دارند ـ فرودگاه مشترک P را طوری بسازیم‌که طول شبکهٔ راهی‌که از فرودگاه P به‌شهرهای A، B و C منتهی می‌شود، کوتاه‌ترین مقدارممکن باشد.

ابتدا، فرض را بر وجود جواب می‌گیریم، ونشان می‌دهیم‌که‌چگونه می‌توان جای P را درصفحهٔ ABC معین کرد! [فرض براین است که‌نقطه‌ای مانند P وجود داردکه مجموع فاصله‌های آن از سه راس مثلث، حداقل مقدار ممکن باشد.]

در استدلال زیر، مبنا را برآن گرفته‌ایم‌که، خواننده با برخی از

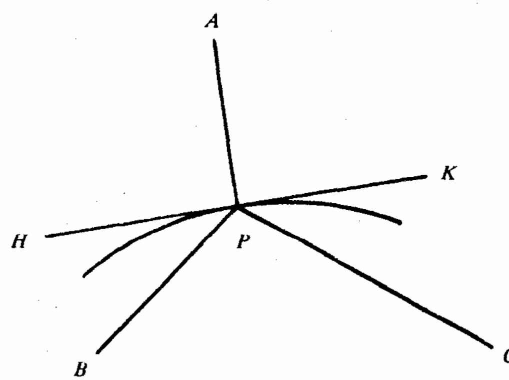
ویژگی‌های بیضی آشناست.

فرض می‌کنیم، نقطهٔ P، همان نقطه‌ای باشدکه، برای‌آن، مجموع فاصله‌های $PA+PB+PC$ می‌نیمم باشد (شکل ۲.۹-a)، $PB+PC$ را ثابت نگه می‌داریم و به‌جست‌وجوی نقطه‌های دیگری مثل Q، غیراز P می‌رویم که برای آن‌ها داشته باشیم: $PB+PC=QB+QC$. این برابری، تعریف‌بیضی را به‌یاد می‌آورد. این بیضی از P می‌گذرد ودو نقطهٔ B و C، کانون‌های آن هستند. چون، فرض‌کرده بودیم که، برای P، حداقل مجموع فاصله‌ها به‌دست آید، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$PA+PB+PC\leqslant QA+QB+QC$$

که ازآن نتیجه می‌شود؛ $PA\leqslant QA$. برای برقراری این نابرابری، بایدP، نزدیك‌ترین نقطهٔ محیط بیضی به‌نقطهٔ A باشد. بنابراین، با توجه به‌آن‌چه دربند ۶.۷ دیده‌ایم، خط‌راست PA درنقطهٔ P، بر بیضی و، درنتیجه، برخط‌راست مماس بر بیضی درنقطهٔ P، یعنی خط‌راست HPK، عمود است (شکل ۲.۹-a) به‌این ترتیب، دراین حالت، تنها یك نقطه برای P وجود دارد و $\widehat{APH}=\widehat{APK}=90^\circ$.

ازطرف دیگر می‌دانیم که اگر، دراین وضع، کانون‌های BوC از بیضی را به‌نقطه P وصل کنیم، پاره‌خط‌های حاصل‌با خط راست HPK زاویه‌های



شکل ۲.۹-a

برابر می‌سازند: $\widehat{BPH}=\widehat{CPK}$. [ایـن، همـان ویژگی بیضی است که در موزه‌هـای علمی از آن استفاده می‌کنند: اگـر کسی در نقطهٔ P ، یـواش و به‌صورت پچ‌پچ حرف بزند، صدای او در نقطهٔ C (که به‌فاصلهٔ ۳۰ فوت یا بیشتر از B قرار دارد) به روشنی شنیده می‌شود، زیرا شکل بیضوی اتاق، موج‌های صدا را منعکس می‌کند و از نقطهٔ B به‌نقطهٔ C می‌رساند.]

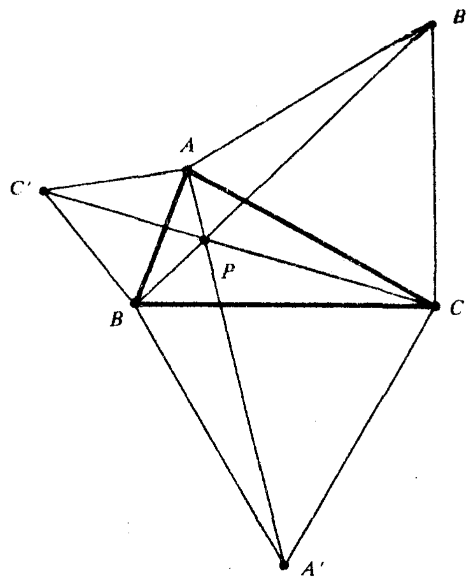
با توجه به آن‌چه گفتیم، به سادگی نتیجه می‌شود. $\widehat{APB}=\widehat{APC}$؛ یعنی AB و AC از نقطهٔ P، به‌یک‌زاویه دیده می‌شوند. به‌دلیل تقارن، BC هم باید از نقطهٔ P، باهمان زاویه دیده‌شود، یعنی

$$\widehat{APB}=\widehat{APC}=\widehat{BPC}=۱۲۰^\circ \qquad (۱)$$

و به‌این‌ترتیب، جـای نقطهٔ P، برای حداقـل بودن $PA+PB+PC$، مشخص می‌شود.

دراین استدلال، اولاً فـرض را بر وجود نقطهٔ P گـرفتیم، ثانیاً از ویژگی‌های کـم وبیش پیچیدهٔ بیضی استفاده‌کردیم تا بـه‌شرط (۱) رسیدیم. اکنون، باطرح و اثبات قضیهٔ زیر، مساله را با روش دیگری حل می‌کنیم. دراین‌قضیه، هم اثبات وجود جواب خواسته شده است و هم خود جواب‌را مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۹.۲ـa. برای هـرمثلث مفروض ABC، نقطهٔ منحصربه‌فرد P (به‌نام نقطهٔ فرمادرمثلث) وجود دارد، به‌نحوی که‌مجموع $PA+PB+PC$ می‌نیمم باشد. درضمن، اگر هیچ کدام از زاویه‌های مثلث برابر ۱۲۰ درجه یا بیشتر نباشد، نقطهٔ P چنان است که، ازآن‌جا، سه‌ضلع مثلث، به‌یک‌زاویه دیده می‌شوند. [موقعیت نقطهٔ P را به‌صورت دیگری‌هـم می‌توان مشخص کرد: P، نقطهٔ برخورد سه پاره‌خط راست AA'، BB' و CC' است که،در آن، A'، B' و C'، عبارتنداز راس‌های سوم مثلث‌هـای متساوی‌الاضـلاع BCA'، CAB' و ABC'، مطابق آن‌چـه درشکل ۹.۲ـb می‌بینید.] در حالتی که‌یکی از زاویه‌های مثلث برابر ۱۲۰ درجه یا بیشتر باشد، بایدنقطهٔ P بر راس زاویه بزرگتر مثلث، منطبق باشد.

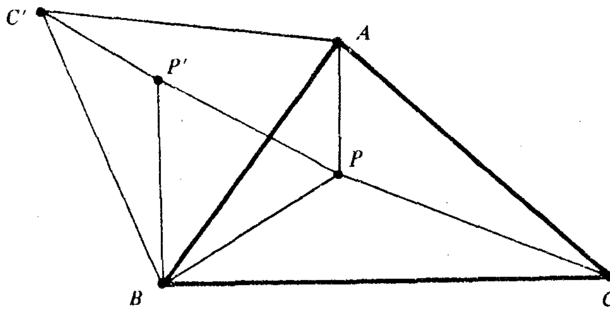


شکل ۲.۹ - b

بخش اول قضیه. اثبات بخش اول قضیه، وقتی که همهٔ زاویه‌های مثلث مفروض ABC کمتراز ۱۲۰ درجه باشند، دشوار نیست. ساختمان سادهٔ زیر را درنظر می‌گیریم: P را نقطهٔ دلخواهی ازصفحهٔ مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۲.۹-c). به‌مرکز B، پاره‌خط راست BA را به‌اندازهٔ ۶۰ درجه در جهت مثلثاتی (خلاف‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم تا پاره‌خط BC' به‌دست آید؛ درهمین دوران، BP، به BP' منجر می‌شود. مثلث‌های ABC' و APP' متساوی‌الاضلاع‌اند. [راس‌های A،B و C را طوری گرفته‌ایم که $ABCA$، حرکت را درجهت مثلثاتی نشان می‌دهد.]

چون‌مثلث $C'BP'$، از دوران‌مثلث ABP، به‌اندازهٔ زاویهٔ ۶۰درجه، به‌دست‌آمده است، بنابراین $AP=C'P'$ وهمچنین $BP=PP'$. درنتیجه، داریم:

$$AP+BP+CP=C'P'+P'P+PC \qquad (۲)$$



شکل ۲۰۹–c

به‌این‌ترتیب، مساله‌حداقل کردن سمت‌چپ رابطهٔ(۲)، به‌مسالهٔ حداقل کردن سمت‌راست‌آن منجر می‌شود که باید، با انتخاب جای مناسبی برای P، به‌آن دست یافت. نقطهٔ C'، ازمثلث ABC، ومستقل ازجای نقطهٔ P به‌دست‌آمد؛ درضمن، مجموع سمت راست در رابطهٔ (۲)، به‌معنای مسیر از نقطهٔ C' تا نقطهٔ C، ازطریق دونقطهٔ بینابینی P' و P است. اگـر بتوانیم، این مسیر را، به‌خط‌راست تبدیل کنیم، آن‌وقت، سمت راست رابطهٔ (۲)، نظیرپاره‌خط راست $C'C$ می‌شود و به‌حـداقل مقدار خود می‌رسد. ولی، این‌وضـع، تنها وقتی ممکن است کـه زاویـه‌های APB، APC و BPC باهـم برابر باشند (هرکدام برابر ۱۲۰ درجه). دراین‌حالت، داریم:

$$\widehat{C'P'B}=\widehat{APB}=۱۲۰^\circ ، \widehat{C'P'B}+\widehat{BP'P}=۱۸۰^\circ=\widehat{BPP'}+\widehat{BPC}$$

یعنی، $C'P'PC$، یك‌خط راست است.

سرانجام یادآور می‌شویم که‌نقطهٔ P را می‌توان طوری درنظر گرفت که، از آن‌جـا، سه‌ضـلع AB، AC و BC، بـه‌زاویه‌ای برابر ۱۲۰ درجه دیده شوند. دایره‌هـای محیطی دو مثلث متساوی‌الاضلاع $C'AB$ و $A'BC$ را درنظرمی گیریم. هر دو دایره ازنقطهٔ B گذشته‌اند و درنقطهٔ دیگری‌هم، یکدیگر را قطع‌می کنند. این‌نقطهٔ برخورد دوم دو دایره، همان نقطهٔ P است که، برای‌آن، مجموع $PA+PB+PC$ می‌نیمم می‌شود. چون‌چهارنقطهٔ B، P، A و C' برمحیط یك دایره واقع‌انـد، مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو در

چهارضلعی $APBC'$ برابر ۱۸۰ درجه است:

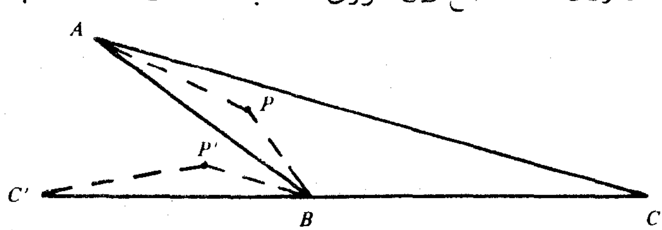
$$\widehat{AC'B}+\widehat{APB}=۱۸۰^\circ$$

اما $\widehat{AC'B}=۶۰^\circ$، بنابراین $\widehat{APC}=۱۲۰^\circ$. به‌همین‌ترتیب، نقطه‌های A'، B، P و C روی محیط یك دایره‌اند که از آن‌جا به‌دست‌می‌آید: $\widehat{BPC}=۱۲۰^\circ$. وچون مجموع زاویه‌هـای دور نقطـهٔ P برابر ۳۶۰ درجـه است، درنتیجه $\widehat{APC}=۱۲۰^\circ$.

اکنون توضیح می‌دهیم، چرا این‌موقعیت نقطهٔ P، همان موقعیتی‌است که درقضیه از ما خواسته‌اند. درواقع، به‌همان‌ترتیبی که ثابت کردیم، نقطهٔ P بر پاره‌خط CC' واقع است، می‌توان ثابت کرد که بر پاره‌خط‌های AA'و BB' هم قرار دارد.

بخش‌دوم قضیه. دراین‌حالت، یکی از زاویه‌های مثلث‌برابر ۱۲۰درجه و یا بیشتر از آن است، مثلاً زاویهٔ B. در این حالت، تجزیه وتحلیل بالا، به‌صورت دیگری درمی‌آیـد. مثلاً درحالتی‌کـه زاویهٔ B برابر ۱۲۰ درجه باشد، نقطه‌های C'، B و C روی یك‌خط راست واقع می‌شود و،بنابراین، ما را به‌موقعیتی از P راهنمائی می‌کندکه برنقطهٔ B منطبق است. درحالت $B>۱۲۰^\circ$، این ساختمان، ما را به‌جایی راهنمائی نمی‌کند.

به‌این‌ترتیب، با ساختمان دیگری، که البته بی‌شباهت به‌ساختمان قبلی نیست، سروکار داریم. P را نقطه‌ای، غیراز B، درصفحهٔ مثلث ABC فرض می‌کنیم. ثابت‌می‌کنیم: $BA+BC<PA+PB+PC$ (شکل ۲.۹-d). نقطهٔ C' روی امتداد ضلع CB طوری انتخاب شده است کـه داشته باشیم:



شکل ۲.۹-d

$BC'=BA$. نقطهٔ P' را از راه دوران‌مثلث APB به‌اندازه زاویهٔ ABC' و رسیدن به‌مثلث $C'P'B$، به‌دست آمده است (اگر A، B و C درجهت مثلثاتی باشند، این دوران هم درجهت مثلثاتی است). می‌بینیم

$$C'P'=AP \quad \text{و} \quad \widehat{PBP'}=\widehat{ABC'}\leqslant ۶۰^\circ$$

و بنابراین

$$BP'\geqslant P'P \quad \text{و} \quad AP+BP+CP\geqslant C'P'+$$
$$P'P+PC>C'C=AB+BC$$

زیرا، باتوجه به‌ساختمان، هردونقطهٔ P و P' نمی‌توانند برخط راست CC' واقع باشند.

اثبات دیگری ازمسالهٔ فرما دربند ۴.۱۰ داده شده است.

بیشتر مساله‌های منسوب به فرما (Pierre de Fermat) ریاضی‌دان فرانسوی (۱۶۰۱-۱۶۶۵) از روی نامه‌های او پیدا شده‌است. او موضوع‌های‌ریاضی را، تنهادر نامه‌هایی که برای‌هم‌عصران خودمی‌نوشت، توضیح می‌داد، و دراغلب موردها، بدون اثبات اگرچه یکی‌از بزرگترین ریاضی‌دانان سدهٔ هفدهم بود، باید یادآوری‌کردکه، حرفهٔ اصلی او وکالت بود و ریاضیات را، تنها به‌خاطر تسکین حس کنجکاوی دنبال می‌کرد و آن را نوعی سرگرمی برای خود می‌دانست. شهرت اصلی فرما، به‌خاطر این قضیه است‌که: معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$، برای $n>۲$، جوابی درمجموعهٔ عددهای درست، برای xوyوz ندارد. اگرچه درستی این‌قضیه برای همهٔ عددهای از $n=۳$ تا $n=۱۰۰۰۰۰$ ثابت شده است، ولی هنوز اثبات‌کامل قضیه، به‌دست نیامده است.

یادداشت مسالهٔ فرما را می‌توان تعمیم داد: اگر $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، نقطه‌های متمایزی واقع بریك صفحه باشند، نقطهٔ P را براین صفحه‌طوری پیدا کنیدکه‌مجموع $\sum PA_j$ حداقل‌مقدار ممکن باشد. این مساله رابه‌صورت دیگری هم می‌توان طرح‌کرد (البته با مسالهٔ فرما کم‌وبیش متفاوت است): می‌خواهیم با شبکه‌ای از خطهای راست ارتباطی بین n نقطه پیداکنیم،

به‌نحوی‌که طول تمامی مسیرهی نیمم باشد و بتوان، روی این شبکه، از هرنقطهٔ A_i به‌هرنقطهٔ A_j رسید. مسالهٔ شبکه، برای $n=3$، شبیه مسالهٔ فرما است، ولی برای $n\geqslant 4$، باهم‌فرق دارند. دراین‌جا، درواقع، بافروشنده‌ای‌سروکار داریم‌که با آغاز از A_1، می‌خواهد به‌همه نقطه‌های دیگر (به‌هرصورتی‌که باشند) برود و، سرانجام، به A_1 برگردد؛ درضمن، باید طول مسیر حرکت او، حداقل مقدار ممکن باشد.

I۰۱۰. مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ P را در درون یا روی محیط مثلث طوری پیدا کنیدکه محیط مثلث PBC ماکزیمم باشد.

I۰۲۰. نقطهٔ P را درصفحهٔ چهارضلعی محدب مفروض طوری پیدا کنیدکه مجموع فاصله‌های آن تا چهار راس چهارضلعی، کمترین مقدار ممکن باشد.

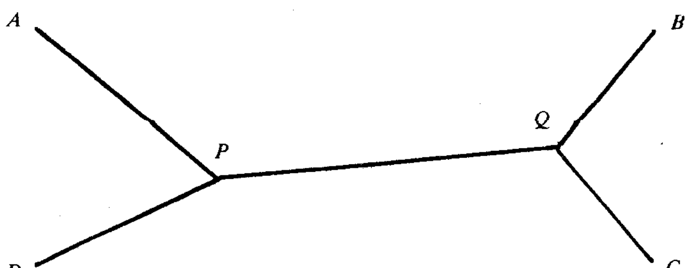
I۰۳۰. مسالهٔ قبل را، برای حالتی‌که چهارضلعی مفروض مقعر باشد، حل کنید.

I۰۴۰. Kرا روی‌ضلعAB ازمثلثABC می گیریم ومی‌دانیم$C\geqslant 90^\circ$ ثابت کنید: $AB+CK>AC+BC$.

I۰۵۰. نقطهٔ P روی ضلع AB (بین AوB) از مثلث مفروض ABC واقع‌است. ثابت کنید: $CP<\max(CA \text{ و } BC)$.

I۰۶۰. مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ P را در داخل یا روی محیط مثلث طوری پیدا کنیدکه مجموع $PA+PB+PC$ ماکزیمم باشد.

I۰۷۰. نقطهٔ P را درصفحهٔ مثلث مفروض طوری پیدا کنیدکه مجموع



شکل I۰۸۰

طول عمودهای وارد از نقطهٔ P برضلع‌های مثلث (و یا درصورت لزوم، بر امتداد ضلع‌ها) حداقل مقدار ممکن باشد.

۸.I۰ مستطیل $ABCD$ مفروض است. چگونه می‌توان نقطه‌های P و Q را، شبیه شکل ۸.I انتخاب کرد که مجموع

$$AP+DP+PQ+BQ+CQ$$

حداقل مقدار ممکن باشد؟(مستطیل را با این فرض در نظر گرفته‌ایم که $AD \geqslant AB$.)

۹.I۰ ABC را مثلثی می‌گیریم که هیچ کدام از زاویه‌های آن بزرگتر از ۱۲۰ درجه نباشد. در ضمن، مثلث‌های $C'AB$، $B'AC$ و $A'BC$ را، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی دربیرون مثلث ABC فرض می‌کنیم (شبیه شکل ۲.۹-b). ثابت کنید: $AA'=BB'=CC'$.

۳.۹. مثلث محاط درمثلث دیگر. مثلثی را محاط درمثلث مفروض ABC گویند که هر راس آن بریك ضلع مثلث ABC واقع باشد. به‌طورطبیعی، این مساله مطرح می‌شود: ازبین همهٔ مثلث‌های محاط درمثلث مفروض، کدام یك دارای مساحت ماکزیمم و کدام یك دارای مساحت مینیمم است؟ همچنین، کدام مثلث بیشترین و کدام مثلث کمترین محیط را دارد؟

دو حکم مربوط به‌مساحت را، می‌توان به‌سادگی روشن کرد. مثلث محاطی با مساحت ماکزیمم، خود مثلث ABC است؛ یعنی اگر خود مثلث ABC را هم، به‌عنوان یکی ازمثلث‌های محاطی به‌حساب آوریم، آن‌وقت، مثلث محاطی بامساحت ماکزیمم وجود دارد. ولی اگر شرط کنیم که‌راس‌های مثلث محاطی PQR روی ضلع‌ها باشند، یعنی راس اول در درون پاره‌خط AB (بین A و B)، دومی در درون پاره‌خط BC و سومی در درون پاره‌خط AC قرار گیرند و نتوانند بر راس‌های مثلث ABC منطبق شوند، آن‌وقت، مثلث محاطی با مساحت ماکزیمم نخواهیم داشت. درواقع، دراین‌حالت، تا آن‌جا که بخواهیم، می‌توانیم به‌مساحت مثلث ABC نزدیك شویم، ولی نمی‌توانیم به‌آن برسیم. به‌همین‌ترتیب، مثلث محاطی با مساحت مینیمم‌هم وجود ندارد. درواقع، دراین‌حالت می‌توانیم مساحت مثلث محاطی PQR

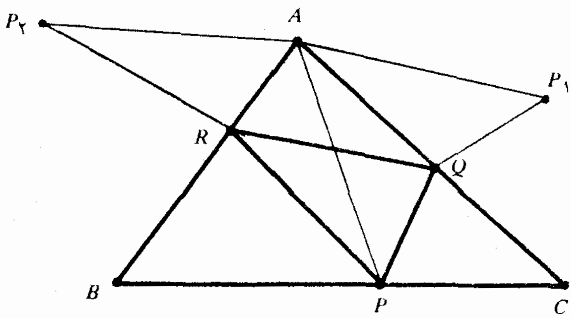
را، تاآن‌جا که بخواهیم، به‌صفر نزدیک کنیم،ولی چون، بنا به‌تعریف‌مساحت، مساحت صفر معنایی ندارد، هرگز به‌خود صفر نخواهیم رسید. به‌این‌ترتیب، دربین مثلث‌های محاطی، مثلثی با مساحت ماکزیمم، یا مثلثی با مساحت می‌نیمم وجود ندارد.

حل مسالهٔ‌مربوط به‌مثلث محاطی با محیط ماکزیمم هم، چندان‌دشوار نیست و ما آن را دربین‌مساله‌های آخر این بند آورده‌ایم. مسالهٔ اصلی‌ما، دراین‌جا، مسالهٔ مربوط به‌مثلث محاطی با محیط می‌نیمم است که مساله‌ای است دشوار و به‌نام مسالهٔ فاگنانو مشهور شده است.

قضیهٔ ۳.۹–a. AP، BQ و CR را ارتفاع‌های مثلث‌مفروض ABC، که زاویه‌هایی‌حاده دارد،می گیریم ثابت کنید، مثلث PQR، دربین همهٔ‌مثلث‌های محاط درمثلث ABC، کمترین محیط را دارد. در حالتی که یکی از زاویه‌های مثلث ABC برابر ۹۰ درجه و یا بیشتر از آن باشد، مثلث محاطی با کمترین مقدار محیط، برای آن، وجود ندارد. محیط هرمثلثی که درمثلث ABC محاط شده باشد، از $2h$ بزرگتر است (h، طول کوچکترین ارتفاع مثلث ABC است)، ولی مثلث‌های محاطی وجود دارندکه، محیط آن‌ها، به‌هر اندازه‌که بخواهیم، به $2h$ نزدیک‌اند.

مثلث PQR، که پای ارتفاع‌های‌مثلث ABC را به‌هم وصل می کند، دربرخی نوشته‌ها، مثلث رکابی نامیده شده است، ولی امروز تقریباً همه‌جا، آن‌را مثلث ارتفاعی می‌نامند؛ به‌نقطهٔ برخورد سه‌ارتفاع‌هم، مرکز ارتفاعی مثلث گویند. اگر نقطه‌ای مانند X را درصفحهٔ مثلث ABC انتخاب کنیم و از آن‌جا سه عمود بر ضلع‌های مثلث فرود آوریم، از وصل پای عمودها، مثلثی به‌دست می‌آیدکه مادراین‌جا،آن را مثلث‌پائی مثلث ABCمی‌نامیم. بنابراین، مثلث ارتفاعی، حالت خاصی ازمثلث پائی می‌شود، وقتی که نقطهٔ X، بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق باشد.

برای اثبات‌بخش اول قضیه، ازمفهوم تقارن استفاده می کنیم. PQR را، مثلث دلخواهی، محاط درمثلث ABC، فرض می کنیم (شکل ۳.۹–a). AP_1Q را قرینهٔ مثلث APQ نسبت به‌خط‌راست AC، و AP_2R را قرینهٔ



شکل ۳۰۹-a

مثلث APR نسبت به‌خط راست AB می‌گیریم. باتوجه به‌هم‌نهشتی مثلث‌ها داریم:

$$PQ+QR+RP=P_1Q+QR+RP_2 \geqslant P_1P_2 \qquad (1)$$

علامت برابری، تنها وقتی‌برقرار است که نقطه‌های P_1، Q، R و P_2 روی یك خط راست باشند.

توجه کنیم: P_1 و P_2 را می‌توان به‌کمك نقطهٔ P مشخص کردو ربطی به‌نقطه‌های Q و R ندارنـد. باتوجه به (۱)، روشن می‌شودکـه، مجموع $PQ+QR+RP$، وقتی می‌تواند به‌حداقل‌مقدار خود برسدکه:

I. P_1، Q، R و P_2 بریك‌خط راست باشند؛

II. فاصلهٔ بین دونقطهٔ P_1 و P_2، از بین بی‌نهایت مقدار ممکن (که بستگی به‌جای P دارند)، حداقل مقدار ممکن باشد.

ثابت می‌کنیم‌که، این دو شرط، می‌توانند برقرار باشند.

برای هر وضع نقطهٔ P، که برضلع BC واقع است، نقطه‌های Q و R را، برضلع‌های AC و AB، درنقطه‌های برخورد پاره‌خـط P_1P_2 با این دو ضلع می‌گیریم. [روشن است، بافرض حاده بودن زاویه‌های مثلث، این امر امکان‌پذیر است. به‌سادگی می‌تـوان استدلال کرد که، دراین‌حالت، پاره‌خط P_1P_2، پاره‌خط‌های AB و AC را قطع‌می‌کند. درواقع، باتوجه به‌مثلث‌های قرینه، داریم:

$$\widehat{P_1AQ} = \widehat{QAP} \quad و \quad \widehat{PAR} = \widehat{RAP_2} \qquad (2)$$

و بنابراین، زاویهٔ P_1AP_2، دو برابر زاویهٔ BAC است و همچنین $\widehat{P_1AP_2} < 180°$. از طرف دیگر، چون زاویهٔ C حاده است، نقطهٔ P_1 در طرفی ازضلع BC قرار دارد که نقطهٔ A واقع است. به همین‌ترتیب، P_2 هم درهمان طرف A، نسبت به BC قرار دارد. بنابراین، پاره‌خط‌راست P_1P_2، پاره‌خط‌های AB و AC را قطع می‌کند.] با این ساختمان، شرط I برقرار می‌شود، یعنی نقطه‌های P_1، Q،R و P_2 روی یك خط راست واقع می‌شوند.

اکنون ببینیم، نقطهٔ P را، چگونه بر پاره‌خط BC انتخاب کنیم که که طول پاره‌خط P_1P_2، حداقل مقدار ممکن شود؟ با توجه به‌مثلث‌های قرینه داریم:

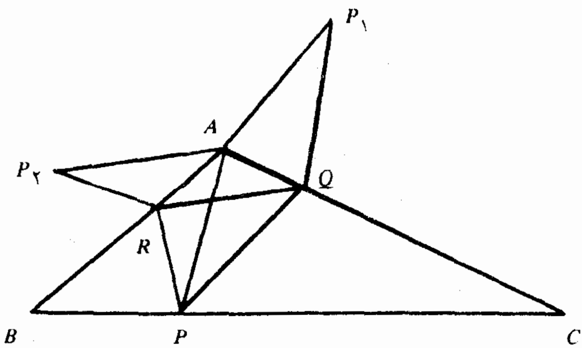
$$AP_1 = AP = AP_2$$

اگر زاویهٔ BAC را α بگیریم، آن‌گاه $\widehat{P_1AP_2} = 2\alpha$ و از مثلث P_1AP_2 نتیجه می‌شود:

$$P_1P_2^2 = AP_1^2 + AP_2^2 - 2AP_1 . AP_2 . \cos 2\alpha = 2(1-\cos 2\alpha) . AP^2$$

چون α مقداری ثابت است، کمترین مقدار P_1P_2، همراه با کمترین مقدار AP به‌دست می‌آید؛ و روشن است که، این طول، تنها وقتی به‌حداقل‌مقدار خود می‌رسد که AP، ارتفاع مثلث ABC باشد.

به‌این‌ترتیب، اگر P را پای ارتفاع وارد از راس A برضلع BC بگیریم، قرینه‌های P_1 و P_2، دارای حداقل فاصله بین خود خواهند بود، دراین‌حالت نقطه‌های Q و R، نقطه‌های برخورد پاره‌خط راست P_1P_2 با AC و AB هستند. با این نقطه‌ها، نابرابری (۱)، به برابری تبدیل می‌شود و، بنابراین، مثلث منحصربه‌فرد PQR، باحداقل محیط، به‌دست می‌آید. می‌توانستیم، به‌جای نقطهٔ A، ازنقطهٔ B یا C آغازکنیم و، از همین‌جا، منحصر به‌فردبودن مثلث PQR نتیجه می‌شود؛ یعنی تضمین می‌کند که BQ و CR هم، ارتفاع‌های مثلث‌اند. اثبات‌بخش اول قضیه، کامل شد.



شکل ۳.۹-b

برای اثبات بخش دوم قضیه، زاویهٔ A را برابر ۹۰ درجه و یا بزرگتر از ۹۰ درجه می‌گیریم. اثبات را از حالتی آغاز می‌کنیم که، زاویهٔ A، منفرجه باشد. توجه کنید که، دراین حالت، برای P_1 و P_2، قرینه‌های نقطهٔ P، به‌شکلی شبیه ۳.۹-b می‌رسیم. دراین‌جا، پاره‌خط P_1P_2، پاره‌خط‌های AC و AB را قطع نمی‌کند. ثابت می‌کنیم:

$$PQ+QP+RP=P_1Q+QR+RP_2>P_1A+AP_2=2AP \quad (3)$$

برابری‌ها، از خود ساختمان شکل به‌دست می‌آیند، بنابراین، تنها به‌اثبات نابرابری می‌پردازیم. دو دایره، یکی به‌مرکز P_1 و شعاع P_1A_1 و دیگری به‌مرکز P_2 و شعاع P_2A_2 درنظر می‌گیریم. دو دایره، به‌جز A، یکدیگر را در نقطهٔ دیگری که درطرف دیگر خط‌راست P_1P_2 (خط بین دومرکز) قرار دارد، قطع می‌کنند. مجموع $P_1Q+RQ+RP_2$ برابر طول مسیری از P_1 به P_2 است که دربیرون دو دایره قرار دارد و، بنابراین، ازمجموع دو شعاع، یعنی P_1A+AP_2 بزرگتر است. بستگی‌های (۳) ثابت شد.

اکنون توجه کنیم که، کمترین مقدار AP برابر است با h، طول‌ارتفاع وارد از راس A برضلع BC، به‌این‌ترتیب، برای همهٔ مثلث‌های محاطی داریم:

$$PQ+QR+RP>2h$$

این نابرابری همیشه برقرار است. اگر P را پای ارتفاع وارد از A بر BC بگیریم، با نزدیک‌کردن Q و R به A، این نابرابری، به برابری نزدیکتر می‌شود، ولی هرگز به برابری تبدیل نمی‌شود. (مگر زمانی‌که Q و R و A منطبق نشوندکه، درآن‌صورت، مثلث محاطی نخواهیم داشت).

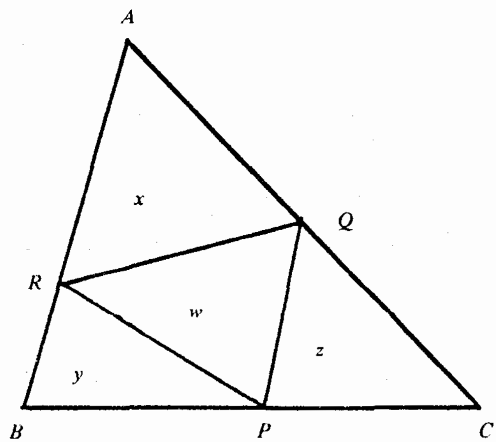
سرانجام، به‌حالت $A=۹۰^\circ$ می‌رسیم. ساختمان شکل، دراین‌حالت، شبیه شکل‌های ۳.۹-a و ۳.۹-b است، با این‌تفاوت‌که، دراین‌جا، نقطه‌های $P_۱$، A و $P_۲$ روی یک خط راست‌اند. بنابراین، برای هر مثلث محاطی PQR داریم:

$$PQ+QR+RP=P_۱Q+QR+RP_۲>P_۱P_۲=۲AP$$

این، یك نابرابری اکید است، زیرا Q و R نمی‌توانند بر A منطبق شوند. اگر نقطهٔ P را طوری انتخاب‌کنیم‌که داشته باشیم $AP=h$، آن‌وقت، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم:

$$PQ+QR+RP>۲h$$

و به‌این‌ترتیب، اثبات قضیهٔ ۳.۹-a کامل می‌شود. هرمثلث محاطی PQR، مثلث اصلی را به‌چهارمثلث کوچکتر تقسیم می‌کند. ازبین این چهارمثلث،



شکل ۳.۹-c

PQR نمی‌تواند کمترین مساحت را داشته باشد، مگر در حالتی کاملاً خاص.

قضیهٔ ۳.۹-b. P، Q و R را نقطه‌هایی در داخل ضلع‌های BC، AC و AB می‌گیریم و مساحت مثلث‌های ARQ، BRP، CPQ و PQR را، به‌ترتیب، x، y، z و w می‌نامیم (شکل ۳.۹-c). ثابت کنید $w>\min(x,y,z)$، به جز وقتی که P، R و Q، نقطه‌های وسط ضلع‌های مثلث ABC باشد که، دراین صورت $x=y=z=w$ (درحالت اخیر، مثلث PQR را، مثلث میانی گویند).

برای اثبات قضیه، به‌این نکته توجه می‌کنیم که، برای هر مثلث مفروض ABC، می‌توان واحد طول را طوری انتخاب کرد که مساحت مثلث، برابر واحد شود. (مسالهٔ ۳.A درفصل اول را ببینید). بنابراین، می‌توان فرض کرد: $x+y+z+w=1$. p، q و r را با این نسبت‌ها، تعریف می‌کنیم:

$$p=\frac{BP}{BC},\quad q=\frac{CQ}{CA},\quad r=\frac{AR}{AB}$$

ازتعریف q، نتیجه می‌شود: $AQ=(1-q)AC$ و برای مساحت مثلث ARQ داریم:

$$x=\frac{1}{2}AR.AQ.\sin A=r(1-q)\frac{1}{2}AB\,AC.\sin A=r(1-q)$$

برای مثلث‌های دیگر هم می‌توان به‌نتیجه‌های مشابهی رسید:

$$\begin{aligned} &x=r(1-q),\quad y=p(1-r),\quad z=q(1-p),\\ &w=1-x-y-z=(1-p)(1-q)(1-r)+pqr \end{aligned}\tag{4}$$

که اگر از نابرابری $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ در مورد برابری اخیر استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$w\geqslant 2\sqrt{pqr(1-p)(1-q)(1-r)}=2\sqrt{xyz}\tag{5}$$

فرض می‌کنیم: $w\leqslant\min(x,y,z)$ و بدون این که به‌کلی بودن بحث

لطمه‌ای واردآید فرض می‌کنیم: $z=\max(x،y،z،w)$. درحالت برابری مساحت‌ها داریم: $x=y=z=w=\frac{۱}{۴}$. بنابراین $z\geqslant\frac{۱}{۴}$. در ضمن از $x\geqslant w$ و $y\geqslant w$ نتیجه‌می‌شود: $xy\geqslant w^۲$، که‌باتوجه به (۵) به‌دست‌می‌آید:

$$xy\geqslant ۴xyz\geqslant xy$$

یعنی باید، درهمهٔ نابرابری‌ها، برابری را انتخاب‌کنیم؛ به‌خصوص به‌دست می‌آید: $z=\frac{۱}{۴}$. بزرگترین مقدارازبین x، y، z و w برابر $\frac{۱}{۴}$ است که، در ضمن، میانگین مساحت‌هاست. ازاین‌رو $x=y=z=w=\frac{۱}{۴}$.

اگر این مقدارها را در رابطهٔ (۵) قرار دهیم:

$$pqr(۱-p)(۱-q)(۱-r)=\frac{۱}{۶۴} \qquad (۶)$$

بیشترین مقدار، برای $p(۱-p)$، به‌ازای عددهای مثبت $p<۱$، برابر $\frac{۱}{۴}$ است که برای $p=\frac{۱}{۲}$ به‌دست‌می‌آید. به‌همین‌ترتیب، باتوجه به‌مقدارهای $q(۱-q)$ و $r(۱-r)$ به‌این‌نتیجه می‌رسیم که: $p=q=r=\frac{۱}{۲}$، یعنی P، Q و R در وسط ضلع‌های مثلث ABC قرار دارند.

I۰۱۰۰ نقطه‌های P، Q و R را روی ضلع‌های BC، CA و AB از مثلث ABC (و نه روی راس‌ها) درنظر می‌گیریم. آیا درست است که برای همهٔ مثلث‌ها و درهمهٔ حالت‌ها، محیط مثلث ABC از محیط مثلث PQR بیشتر است؟ اگر پاسخ مثبت است، آن را ثابت کنید، و اگر پاسخ منفی است، نمونه‌ای بیاورید.

I۰۱۱۰ K را نقطه‌ای در داخل مثلث ABC می‌گیریم. AK، BK و CK را امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های مقابل مثلث را، به‌ترتیب، درنقطه‌های P، Q و R قطع کنند. آیا برای‌همهٔ مثلث‌ها و برای هر موقعیتی ازنقطهٔ K،

نابرابری

$$AB+BC+AC>AP+BQ+CR$$

برقرار است؟ اگر پاسخ مثبت است، آن را ثابت کنید و اگر پاسخ منفی‌است، نمونه‌ای بیاورید.

۴.۹. قضیهٔ اردوش (Erdos) **و موردل** (Mordell). برای این که بتوانیم به‌قضیهٔ‌اصلی این بند بپردازیم، ابتدا قضیهٔ مشهور اولر را می‌آوریم.

قضیهٔ ۴.۹–a. اگر r و R را، به‌ترتیب، شعاع‌های دایره‌های‌محاطی و محیطی یک‌مثلث فرض کنیم، داریم: $R\geqslant ۲r$. علامت برابری، تنها درمثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است.

L، M و N را، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های BC، AC و AB ازمثلث ABC می‌گیریم. دو مثلث LMN و ABC متشابه‌اند و هرضلع مثلث LMN نصف ضلع متناظر خود درمثلث ABC است. چون شعاع دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC برابر R است، بنابراین، شعاع‌دایرهٔ محیطی مثلث LMN برابر $\frac{R}{۲}$ می‌شود. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، کوچکترین دایره‌ای است که تنها در یک‌نقطه با هرضلع مثلث مشترک است؛ بنابراین $r\leqslant\frac{R}{۲}$. علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که، دایرهٔ محیطی مثلث LMN، بر سه ضلع مثلث ABC مماس، یعنی بر دایرهٔ محاطی این مثلث منطبق باشد. و این، درحالتی پیش می‌آید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

قضیهٔ اولر را می‌توان، به‌سادگی، درفضای سه‌بعدی تعمیم داد و بین شعاع‌های دوکرهٔ محاطی ومحیطی یک چهاروجهی، رابطه‌ای به‌دست آورد. این اثبات را درفصل یازدهم خواهیم دید.

همین قضیه را می‌توان باتوجه به برابری

$$CI^۲=R(R-۲r) \qquad (۱)$$

هم ثابت‌کرد که، درآن، CI عبارت است‌از فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایرهٔ

محیطی ومحاطی مثلث. درحالتی‌که این دومرکز برهم منطبق باشند، بامثلث متساوی‌الاضلاع سروکار داریم. $CI^۲$ مقداری است غیرمنفی، بنابراین $R-۲r$ همواره مثبت است، به‌جز درمثلث متساوی‌الاضلاع که برابر صفر می‌شود. [دراین‌جا، برای این‌که کار بـه‌درازا نکشد، از اثبات برابری (۱) خودداری می‌کنیم.]

قضیهٔ ۴.۹-b (قضیهٔ اردوش وموردل). اگر $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ رافاصله‌های سه راس‌مثلث ازنقطهٔ مفروض P در داخل‌مثلث، و $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ رافاصله‌های همین نقطهٔ P از سه‌ضلع مثلث فرض‌کنیم، داریم:

$$R_۱+R_۲+R_۳\geqslant ۲(r_۱+r_۲+r_۳) \qquad (۴)$$

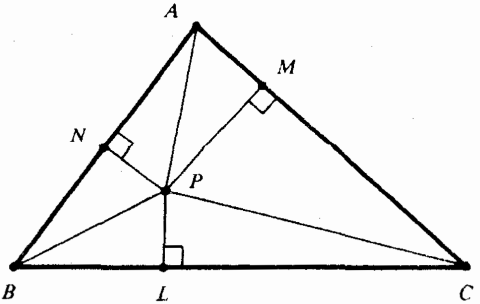
علامت برابری، تنها وقتی برقرار است‌که مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع ونقطهٔ P منطبق بر مرکز هندسی مثلث باشد.

توجه داریدکه قضیهٔ قبلی را، نمی‌تـوان حـالت خاصی از این قضیه دانست. عمودهای PL، PM و PN را، به‌ترتیب، برضلع‌های BC، AC و AB فرود می‌آوریم (شکل ۴.۹-a)؛ بنابراین

$$R_۱=PA,\ R_۲=PB,\ R_۳=PC;\ \ r_۱=PL,\ r_۲=PM,\ r_۳=PN$$

اگر زاویه‌های راس‌های A، B و C را، به‌ترتیب، α، β و γ بگیریم، در مثلث‌های AMN و AMP داریم:

$$AM.\sin\alpha=MN.\sin(ANM),R_۱.\sin(APM)=AM.\sin ۹۰^\circ \qquad (۳)$$



شکل ۴.۹-a

چون هریك از زاویه‌های ANP و AMP، زاویه‌هایی قائمه‌اند، بنابراین از چهار نقطهٔ A، M، P و N می‌توان یك دایره گذراند و، در نتیجه، زاویه‌های ANM و AMP باهم برابر می‌شوند. باتوجه به‌این نکته، از ضرب دو برابری (۳)، به‌دست می‌آید:

$$MN = R_1 . \sin\alpha$$

زاویه‌های MPN و α مکمل یکدیگرند، بنابراین: $\cos(MPN) = -\cos\alpha$. اکنون باتوجه به‌قانون کسینوس‌ها درمثلث PMN داریم:

$$MN^2 = r_2^2 + r_3^2 + 2 r_2 r_3 \cos\alpha \qquad (4)$$

وچون $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$، بنابراین

$$\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$$

به‌این‌ترتیب، برابری (۴) به‌این صورت درمی‌آید:

$$MN^2 = (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2 + (r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta)^2 \geqslant$$
$$\geqslant (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2 \qquad (5)$$

ولی $MN = R_1\sin\alpha$، بنابراین

$$R_1 \geqslant r_2\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)^2 + r_3\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 \qquad (6)$$

اگر نابرابری‌های مشابه (۶) را، برای R_2 و R_3 بنویسیم، سپس، نسبت به r_1، r_2 و r_3 منظم کنیم و نابرابری $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$ را، برای‌هر مقدار مثبت x، درنظر بگیریم (علامت برابری، تنها برای $x=1$ برقرار است)، به‌همان نابرابری (۲) می‌رسیم. [نابرابری $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$، به‌ترتیب

برای $x=\frac{sin\gamma}{sin\alpha}$، $x=\frac{sin\alpha}{sin\beta}$ و $x=\frac{sin\beta}{sin\gamma}$ به‌دست می‌آید.]

ببینیم، نابرابری (۲)، در چه‌حالتی به‌برابری تبدیل می‌شود. روشن است که اگر داشته باشیم:

$$R_۱=R_۲=R_۳ \quad و \quad r_۱=r_۲=r_۳ \quad و \quad R_۱=۲r_۱$$

یعنی، وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد و، درضمن، نقطهٔ P بر مرکز هندسی مثلث قرار گیرد، نابرابری (۲) به برابری تبدیل می‌شود.

برعکس، فرض می‌کنیم، به‌جای نابرابری (۲)، برابری دو طرف را داشته باشیم، باتوجه به‌اثبات، نابرابری (۵) هم به‌برابری تبدیل می‌شود و درنتیجه

$$r_۲cos\gamma=r_۳cos\beta \qquad (۷)$$

همچنین، چون نابرابری (۶) هم، به‌صورت برابری درمی‌آید، باید داشته باشیم:

$$\frac{sin\gamma}{sin\alpha}=۱ \Rightarrow sin\gamma=sin\alpha$$

و به‌همین‌ترتیب، به‌برابری $sin\alpha=sin\beta=sin\gamma$ می‌رسیم که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $\alpha=\beta=\gamma=۶۰^\circ$. یعنی مثلث، متساوی‌الاضلاع است. با توجه به برابری دو زاویهٔ β و γ، از برابری (۷) نتیجه می‌شود: $r_۲=r_۳$ و به‌طورکلی $r_۱=r_۲=r_۳$، یعنی، نقطهٔ P، مرکز دایرهٔ محاطی است که همان مرکز هندسی درمثلث متساوی‌الاضلاع است.

قضیه‌های این بخش به اولر، اردوش و موردل تعلق دارد؛ ولی این، تنها بخش بسیارکوچکی از کارهای گسترده این ریاضی‌دان، یعنی اولر است. لئوناداولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، در تمامی شاخه‌های ریاضیات، سهم عمده‌ای دارد. بسیاری‌ازنمادها ونشانه‌گذاری‌هائی راکه‌امروزبه‌کار می‌بریم،مدیون اوهستیم. به‌عنوان مثال، او بودکه‌برای نخستین‌بار، نماد π را برای‌نسبت

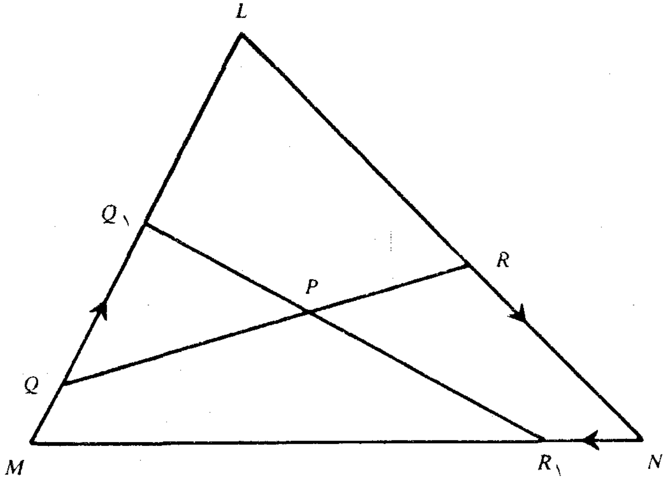
محیط دایره به‌قطر آن، درنظر گرفت و، همچنین، نماد e را به‌عنوان ثابت اصلی ریاضیات (که دربارهٔ آن، در بند ۸.۲ صحبت کردیم). پاول اردوش، ل.ژ.موردل، از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان سدهٔ بیستم‌اند. هر دوی آن‌ها، چه در زمینهٔ کارهای نظری و چه در زمینهٔ حل مساله‌ها، شهرت بسیار دارند.

۵.۹. خط‌های تقسیم‌کننده. اگر P، نقطهٔ دلخواهی در داخل یك مثلث باشد، آیا می‌توان خط‌راستی چنان رسم کرد که از نقطهٔ P بگذرد و مساحت مثلث را به دوبخش برابر تقسیم کند؟ پاسخ مثبت است. به‌جز آن، می‌توان خط‌راستی از نقطهٔ P گذراند که محیط مثلث را نصف کند. همچنین، می‌توان خط‌راستی از نقطهٔ P رسم کرد، که نقطهٔ P، در وسط پاره‌خط راست محدود به‌محیط مثلث‌قرار گیرد. این‌ویژگی‌ها، خاص مثلث نیست. قضیه‌های مشابهی می‌توان دربارهٔ چندضلعی‌های محدب و یا، به‌طورکلی، دربارهٔ هر ناحیهٔ محدب، به‌دست آورد.

دراین‌جا از اثباتی استفاده می‌کنیم که ابتکاری وساده است، ولی البته، بیشترشهودی است تامنطقی. اثبات دقیق را باید باتجزیه وتحلیل عمیق‌تری، که به مطالعهٔ دستگاه عددهای حقیقی وبستگی آن با خط‌ها و منحنی‌ها مربوط می‌شود، دنبال کرد.

به‌حالتی می‌پردازیم که، خط‌راست، طوری‌ازنقطهٔ P بگذرد که‌مساحت مثلث را به‌دو بخش برابر تقسیم‌کند طرح استدلال چنین است.

خط‌راستی درنظر می‌گیریم که ازنقطهٔ P بگذرد و ضلع‌های مثلث را، در نقطه‌های Q و R قطع کند. (شکل ۵.۹-a). مساحت مثلث LMN را A و مساحت بخشی از مثلث را که درسمت چپ پاره‌خط QR واقع است (برای ناظری‌که ازنقطهٔ Q به‌سمت R نگاه می‌کند)، rA فرض می‌کنیم. در شکل۵.۹-a، مساحت‌مثلث LQR برابر rA و، بنابراین، مساحت‌چهارضلعی $QRMM$ برابر $(1-r)A$ می‌شود. درواقع، باید ببینیم درچه‌حالتی، rبرابر $\frac{1}{2}$ است، چرا که‌دراین‌حالت، مساحت مثلث LQR برابر مساحت‌چهارضلعی



شکل ۵.۹-a

$QRNM$ می‌شود.

ببینیم، وقتی نقطهٔ Q، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی‌محیط مثلث حرکت‌کند، چه پیش می‌آید؟ وقتی که مثلاً درشکل ۵.۹-a، نقطهٔ Q به Q_1 برسد، نقطـهٔ R روی R_1 قرار می گیرد و، چون P نقطـه‌ای ثابت است، Q_1، P و R_1 روی یك‌خط راست‌اند. مساحت بخش‌سمت‌چپ‌پاره‌خط Q_1R_1، یعنی مساحت چهارضـلعی Q_1R_1NL، مقـداری برابر r_1A دارد. به‌این‌ترتیب، وقتی Q به‌موقعیت Q_1برسد، عدد r باعدد r_1 عوض‌می‌شود. اگر Q تمامی مسیر تا راس L و بعدازآن را طی کند و، درنتیجه، R روی ضلع LM قرار گیرد، چه بر سر r می‌آید؟ روشن است که نقش Q و R باهم عوض می‌شود ومساحت سمت چپ QR به‌صورت $A(1-r)$ درمی‌آید.

به‌این‌ترتیب، وقتی Q به‌طـور یکنواخت از مـوقعیت اصلی خودش حرکت‌کند و با پیمودن محیط مثلث به‌موقعیت R برسد، مساحت سمت‌چپ پاره‌خط متحرك، از rA به $A(1-r)$ تبدیل می‌شود. اگر r از $\frac{1}{2}$ کوچکتر

باشد، $r-1$ را که از $\frac{1}{2}$ بیشتر است و طبیعی است که، در برخی حالت‌های بینابینی، به مقدار $\frac{1}{2}$ می‌رسد. دراین وضع، مثلث LMN، به‌دوبخش هم‌ارز (یعنی با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌شود.

روشن است که ازاین روش استدلال، نه‌تنها درمثلث، بلکه درمورد هرناحیه‌ای ازصفحه که محدب باشد، می‌توان استفاده‌کرد (مثل یك چندضلعی محدب دلخواه). از همین روش می‌توان برای حالتی‌که باید محیط مثلث یا خودپاره‌خط QR به‌وسیله نقطهٔ P نصف‌شود، نیزمی‌توان استفاده‌کرد. شبیه این استدلال را، درمورد قضیهٔ زیر هم می‌توان به‌کار برد.

قضیهٔ ۹.۵–a. برای هر مثلث، خط راستی وجود داردکه محیط و مساحت آن را نصف می‌کند. همین قضیه را، درمورد هرناحیهٔ محدب‌صفحه، ومثلاً هرچندضلعی محدب هم می‌توان طرح کرد.

یادداشت. درموردمثلث، بیش‌ازیك‌خط‌راست‌وجود داردکه هم‌محیط و هم‌مساحت‌را نصف‌می‌کند. طول‌ضلع‌های‌مثلث را a، b و c می‌گیریم وفرض می‌کنیم $a \leqslant b \leqslant c$. اگر $s=\frac{a+b+c}{2}$، نصف‌محیط مثلث باشد،درحالت $s^2>2bc$ سه‌پاره‌خط‌راست، درحالت $s^2=2bc$ دوپاره‌خط‌راست ودرحالت $s^2<2bc$ یك‌پاره‌خط راست، وجود داردکه هم‌محیط و هم‌مساحت مثلث را نصف می‌کنند. دراین‌جا، به‌اثبات این نتیجه‌گیری نمی‌پردازیم.

برای اثبات قضیهٔ ۹.۵–a از همان راهی می‌رویم که درقضیهٔ قبلی با آن آشنا شدیم. دراین‌جا، درضمن، از این حکم معروف هم استفاده‌خواهیم کردکه: تابع پیوسته، می‌تواند همهٔ مقدارهای بین دو مقدار مفروض را قبول‌کند. نقطهٔ دلخواه Q را روی محیط مثلث در نظر می‌گیریم و Q' را نقطه‌ای ازمحیط مثلث فرض می‌کنیم‌که محیط مثلث به‌وسیلهٔ دونقطهٔ Q و Q' نصف شده باشد. A را مساحت مثلث و rA را مساحت بخش سمت چپ پاره‌خط‌راست QQ' می‌گیریم (سمت‌چپ، برای ناظری‌که ازنقطهٔ Q، نقطهٔ

Q' را نگاه می‌کند). اگر $r=\frac{1}{2}$ باشد، QQ' همان پاره‌خط مطلوب‌است.

درحالت $r\neq\frac{1}{2}$، فرض‌می‌کنیم، نقطهٔ Q به‌طور یکنواخت درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و روی محیط مثلث حرکت کند، Q' هم در همان‌جهت، محیط مثلث را می‌پیماید (دراین‌جا، حرکت درخلاف جهت عقربه‌های ساعت، نقش خاصی ندارد. منظورحرکت دو نقطهٔ Q و Q' است، به‌نحوی که محیط مثلث به‌وسیلهٔ دو نقطه، نصف شده باشد)، وقتی نقطهٔ Q نصف محیط را طی کند و به‌نقطهٔ Q' برسد (که دراین‌صورت، Q' هم در موقعیت Q قرار می‌گیرد)، مساحت بخش سمت QQ' از مقدار rA به $A(1-r)$ تبدیل می‌شود. اگر $r<\frac{1}{2}$، آن‌گاه $1-r>\frac{1}{2}$؛ و اگر $r>\frac{1}{2}$، آن‌گاه $1-r<\frac{1}{2}$؛ و بنابراین، نقطه‌ای بینابینی، ضمن حرکت Q، وجود دارد‌که، برای آن، پاره‌خط QQ'، مساحت ومحیط مثلث را نصف می‌کند.

I۱۲۰. C را مرکز هندسی مثلث می‌گیریم و خط راستی ازآن عبور می‌دهیم تا مثلث را به دوبخش تقسیم کند. اگر نسبت مساحت‌های دوبخش مثلث را r فرض کنیم، ثابت کنید، کوچکترین و بزرگترین مقدار r، برابر است با $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{4}$.

I۱۳۰. درمسالهٔ قبل، فرض‌کنید، خط‌راست QGR که ازنقطهٔ G مرکز هندسی مثلث می‌گذرد، محیط مثلث را درنقطه‌های Q و R قطع کند. کمترین و بیشترین مقدار نسبت $s=\frac{QG}{GR}$ را، با استدلال، محاسبه کنید.

مساله‌ای‌مشابه به‌دومسالهٔ بالا، برای تقسیم محیط مثلث به‌دوبخش، به‌وسیلهٔ پاره‌خطی که ازمرکز هندسی مثلث بگذرد، وجود دارد. برخلاف دو مسالهٔ فوق که، درآن‌ها، اکسترمم‌های دونسبت r و s، برای همهٔ‌مثلث‌ها، مقداری ثابت است، دراین‌جا، اگر نسبت دو بخش محیط را t بگیریم،

مقدار اکسترومم‌های t درمثلث‌های مختلف، باهم فرق دارند، مثلاً در مثلث متساوی‌الاضلاع، اکسترومم‌های t، برابر $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۵}{۴}$ است، درحالی که برای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، اکسترومم‌های t برابر $\frac{۶\sqrt{۲}-۴}{۷}$ (تقریباً ۰/۶۴) وعکس آن است. بزرگترین کران پایین برای t، درمجموعهٔ مثلث‌ها، برابر $\frac{۱}{۳}$ است، ولی هرگز به‌خود $t=\frac{۱}{۳}$ نمی‌توان رسید. رسیدن به‌این نتیجه‌ها چندان دشوار نیست و با روش‌های مقدماتی، می‌توان آن‌ها را ثابت کرد.

یادداشت. مسالهٔ ۱۳.I را می‌توان‌حالت خاصی ازاین مساله‌دانست: ناحیهٔ‌محدب R ونقطهٔ‌دلخواه K در درون‌این‌ناحیه، درصفحه‌ای‌مفروض‌اند. هروتری ازناحیهٔ R، که‌ازنقطهٔ K، بگذرد به‌وسیلهٔ‌نقطهٔ K به‌دو پاره‌خط بخش می‌شود، نسبت‌پاره‌خط بزرگتر به‌کل وتر را P می‌نامیم. اگر برای هرنقطهٔ K، ماکزیمم‌این‌نسبت را $P_1(K)$ بگیریم، می‌توان‌ثابت‌کردکه $P_1(K)$ برای هرنقطهٔ K در درون‌ناحیه R، وجود دارد. درموقعیت‌های مختلف نقطهٔ K، مقدار $P_1(K)$ تغییرمی کندکه کوچکترین آن‌ها را r می‌نامیم. r را، نسبت بحرانی، برای ناحیهٔ محدب وبستهٔ R گویند. هرنقطهٔ K، از درون ناحیه، که‌وتری ازناحیهٔ R را بـه نسبت بحرانی تقسیم‌کند، نقطهٔ بحرانی این ناحیه است. نیومن (B .H. Neumann) درسال ۱۹۳۹ ثابت‌کردکه، برای هر ناحیهٔ محدب بستهٔ R درصفحه، یك نقطهٔ بحرانی منحصربه‌فرد و یك نسبت‌بحرانی وجود داردکه درنابرابری‌های $\frac{۱}{۲}\leqslant r\leqslant\frac{۲}{۳}$ صدق‌می کند. مقدار $\frac{۱}{۲}$، تنهابرای ناحیه‌هایی پیدا می‌شودکه مرکز تقارن داشته باشندکه، دراین‌صورت، مرکز تقارن، همان نقطهٔ بحرانی است؛ مقدار $\frac{۲}{۳}$ تنها درمثلث‌هـا به‌دست می‌آید و، درآن‌ها، مرکـز هندسی مثلث، برنقطهٔ بـحرانی آن منطبق است. آقای

هامر (P.C.Hammer)، درسال ۱۹۵۱، نابرابری $\frac{۱}{۲}\leqslant r\leqslant\frac{۲}{۳}$ را، برای فضای دو بعدی وتعمیم آن را، $\frac{۱}{۲}\leqslant r\leqslant\frac{n}{n+۱}$، بـرای فضـای n بعـدی، ثابت کرد.

۶.۰۹ محصور کردن ناحیه‌ای محدب در مستطیل. به‌ناحیهٔ R واقع در صفحه، محدب گویند، وقتی کـه، با انتخاب هر دو نقطهٔ دلخواهٔ P و Q از ناحیهٔ R، تمامی پاره‌خط راست PQ در R واقع باشد.

به‌عنوان مثال‌های آشنا، می‌توان از دایره، مثلث و بیضی یاد کرد که شامل نقطه‌های واقع در درون خود بـاشند. نقطه‌های درونی دایره، یعنی نقطه‌های $(x،y)$ که باشرط $x^۲+y^۲<۱$ سازگارباشند، یك ناحیهٔ محدب را مشخص می‌کنند. در این‌جا، بیشتر به‌ناحیهٔ محدب بسته توجه داریم، یعنی مثلاً، مجموعهٔ نقطه‌هـایی که بـا شرط $x^۲+y^۲\leqslant۱$ سازگار باشند، یعنی نقطه‌های درونی یا روی محیط دایره.

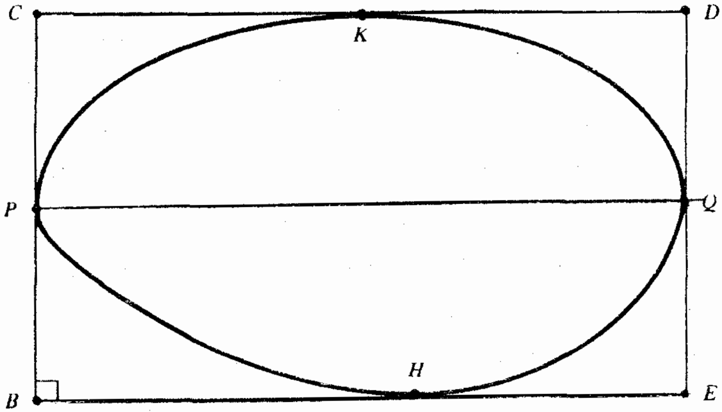
مجموعهٔ نقطه‌های $(x،y)$، باشرط $x\geqslant ۰$ و $y\geqslant ۰$، ناحیه‌ای محدب را به‌وجود می‌آورند، باوجودی که این ناحیه، به‌طور کامل، محدود نیست، ناحیهٔ R را محدود گویند؛ وقتی کـه بتوان، همهٔ نقطه‌هـای آن را، دریك دایره محصور کـرد. این شرط را، در دستگاه محورهای مختصات، می‌توان به‌این‌صورت بیان کرد: ثابتی‌مثل k وجود دارد، به‌نحوی که $x^۲+y^۲\leqslant k$، شامل همهٔ نقطه‌های ناحیهٔ محدود بـاشد همان‌طور کـه انتظار می‌رود، هر ناحیهٔ محـدب محـدود، دارای مساحــت معینی است، ولی ما دراین‌جـا، به‌اثبات این‌مطلب نمی‌پردازیم. همچنین، این مطلب را می‌پذیریم که، برای هرناحیهٔ محدب محدود وبستهٔ R، می‌توان دونقطهٔ P و Q را روی مرز R پیدا کرد (که البته، ممکن است منحصربـه‌فرد نباشند)، به‌نحوی کـه فاصلهٔ PQ، ماکزیمم باشد (درحالتی کـه ناحیه، باز بـاشد، چنین دو نقطه‌ای پیدا نمی‌شود، مثلاً نقطه‌های P و Q را درناحیهٔ $x^۲+y^۲<۱$ نمی‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که فاصلهٔ PQ حـداکثر مقدار ممکن بـاشد). خط محمل یك

ناحیهٔ محدب محدود بسته، مثل R، به‌خط‌راستی گویندکه، دست‌کم، شامل یك‌نقطه ازناحیهٔ R باشد وتمامی ناحیهٔ R دریکی از دونیم‌صفحه‌ای قرار گرفته باشدکه به‌وسیلهٔ این خط راست مشخص شده است (در دستگاه مختصات، این نیم‌صفحه را می‌توان با $ax+by+c \geqslant 0$ معین کردکه، درآن، a و b و c ثابت‌هایی مناسب‌اند). برای هرخط راست مفروض L در صفحه و هرناحیهٔ محدب بسته، درست دو خط راست محمل وجود داردکه با L موازی‌اند (مگر آن‌که، ناحیهٔ مفروض، بازه‌ای از L باشدکه، درآن‌صورت، تنها خود L، خط‌محمل است). با این مقدمه، اکنون به‌قضیهٔ اساسی خود می‌پردازیم.

قضیهٔ ۹.۵–a. ناحیهٔ محدب محدود و بسته‌ای مثل R، درصفحه داده شده است‌که مساحتی برابر A دارد. ثابت کنید، این‌ناحیه را می‌توان در مستطیلی‌که، مساحت آن، حداکثر $2A$ است، محاط‌کرد.

خواهیم دیدکه، این نتیجه را، نمی‌توان بهترکرد، یعنی اگر ضریب ۲ را در $2A$، با هرعددکوچکتر از ۲ عوض کنیم، حکم قضیه نادرست می‌شود. در واقع، اگر ناحیهٔ محدب را یك مثلث بگیریم، مستطیل محیطی با مساحت‌کمتر از$2A$، برای آن، وجود ندارد. نوعی بستگی بین این‌قضیه، با مسالهٔ شمارهٔ ۳ دربند ۴.۳ وجود دارد. درآن‌جا می‌خواستیم مستطیلی را درمثلث محاط (ونه برآن، محیط) کنیم.

برای اثبات، دونقطهٔ P و Q را درمرز ناحیهٔ R انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی‌که فاصلهٔ PQ ماکزیمم باشد (این فاصلهٔ ماکزیمم را، قطر ناحیهٔ R گویند). روشن است‌که، تمامی ناحیه، بین دو خط راستی قرار می‌گیرد که ازنقطه‌های P و Q، عمود بر PQ رسم شده باشند. (شکل ۹.۶–a)، زیرا درغیراین‌صورت، دونقطهٔ دیگر پیدا می‌شودکه فاصله‌ای بزرگتراز فاصلهٔ PQ دارند. به‌این‌ترتیب، این دو خط راست عمود بر PQ،خطهای محمل ناحیهٔ Rاند. اگر دو خط محمل دیگر را،که موازی با PQ هستند، رسم کنیم، برای ناحیهٔ R، مستطیل محیطی $BCDE$ به‌دست می‌آیدکه نقطه‌های H و K ازآن، هم روی مرز ناحیهٔ R و هم روی خطهای راست



شکل ۶.۹-a

BE و CD قرار دارند. چون نقطه‌های P، K، Q و H، روی مرز ناحیهٔ محدب‌قرار دارند، چهارضلعی $PKQH$، که در داخل ناحیهٔ R قرارمی گیرد. مساحت این چهارضلعی، نصف مساحت مستطیل $BCDE$ است، زیرا PQ با DE و CD موازی است. اگر مساحت ناحیهٔ R برابر A باشد، حداکثر مساحت چهارضلعی $PKQH$ برابر A و حداکثر مساحت مستطیل $BCDE$ برابر $2A$ می‌شود. قضیه ثابت شد.

حالت‌خاصی وجود داردکه باید ذکر شود. ممکن است پاره‌خط PQ، جزئی از مرز ناحیهٔ R باشد، مثل وقتی که ناحیهٔ R، یك مثلث یا یك نیم‌دایره باشد. در این‌حالت، خود PQ یك خط محمل است و مستطیل $BCDE$ به یکی از دو مستطیل $PQDC$ یا $PQEB$ وچهارضلعی $PKQH$ به یك مثلث تبدیل می‌شوند (شکل ۶.۹-a). ولی به‌هرحال، بخش آخر اثبات قضیه، به‌قوت خود باقی می‌ماند.

I.۱۴۰ اگر ناحیهٔ R درقضیهٔ ۶.۹-a، مثلثی با مساحت برابر A باشد، ثابت‌کنید، مساحت هر مستطیل محیط برآن، دست‌کم برابر است با $2A$. [شاید ساده‌تر باشد این حکم را، که هم‌ارز آن است، ثابت‌کنیم: برای هر مستطیل مفروض، هر مثلثی که‌راس‌هایش روی محیط‌مستطیل باشد،

دارای مساحتی حداکثر برابر با نصف مساحت مستطیل است.]

I۰۱۵۰ ۹ نقطه را در داخل یا روی محیط مربع به ضلع واحد در نظر می گیریم. ثابت کنید، از بین این نقطه‌ها، می‌توان سه نقطه طوری انتخاب کرد که یا بر یک خط راست واقع باشند و یا مثلثی با حداکثر مساحت $\frac{۱}{۸}$ تشکیل دهند. [این مساله، از المپیادهای داخلی چین (۱۹۷۲) برداشته شده است.]

I۰۱۶۰ سه نقطه روی محیط یک متوازی‌الاضلاع طوری انتخاب شده‌اند که روی یک خط راست نباشند. حداکثر مساحت مثلثی که این سه نقطه تشکیل می‌دهند، درمقایسه با مساحت متوازی‌الاضلاع، چقدر است؟

فصل دهم

مساله‌های گوناگون کاربردی

پیش‌ازاین‌هم، از برخی مساله‌های کاربردی، مثل مسالهٔ حرکت قایق بادی با حداکثر سرعت، یادکرده‌ایم. اکنون می‌خواهیم، به مساله‌های بیشتری دربارهٔ کاربرد آن چه به صورت نظری دیده‌ایم، بپردازیم. اغلب بخشهای این فصل، مستقل از یکدیگرند، تنها بند ۲.۱۰ بر مبنای ۱.۱۰، و بند ۶.۱۰ برمبنای ۵.۱۰ قرار دارند.

۱.۱۰. مناسب‌ترین خط‌ها. وقتی که با سه‌نقطه یا تعداد بیشتری از نقطه‌ها درصفحه، سروکار داشته باشیم، درحالت کلی، همهٔ آن‌ها روی یك خط راست نیستند، مثلاً نقطه‌های

$$(۱،۳)، \quad (۳،۴)، \quad (۵،۶)، \quad (۷،۷) \qquad (۱)$$

بریك خط راست واقع نیستند، اگر همهٔ این نقطه‌ها، بر یك خط راست قرار داشتند، به معنای این بود که یك رابطهٔ خطی بین x و y وجود داشت که طول وعرض همهٔ این نقطه‌ها، درآن صدق می‌کرد. اکنون، یعنی درحالتی که نقطه‌های ما بر یك استقامت نیستند، می‌خواهیم خط‌راستی را پیدا کنیم که، برای مجموعهٔ این نقطه‌ها، بهترین تقریب باشد، یعنی اگر از خود این نقطه‌ها نمی‌گذرد، ازنقطه‌های خیلی نزدیك به‌آن‌ها عبورکند. یکی از روش‌های معمول دراین مساله، روش حداقل مربع‌ها است. خط‌راستی راکه به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید، حداقل مربع‌ها یامنحنی خطی برگشت گویند.

ابتدا، این روش را دربارهٔ نقطه‌های مشخص (۱) شرح می‌دهیم و، سپس، دربند بعدی، مساله را درحالت کلی، که بامجموعه‌ای شامل n نقطه سروکار داشته باشیم، حل می‌کنیم. هرخط راستی را، که موازی بامحور

عرض نباشد، می‌توان به‌صورت $y=mx+b$ نوشت که، در آن، m ضریب زاویه خط و $(\circ, b)$ نقطه‌ای از این خط است. باید m و b را طوری پیدا کنیم که، خط راست $y=mx+b$، بهترین تقریب، برای مجموعهٔ نقطه‌های (۱) باشد.

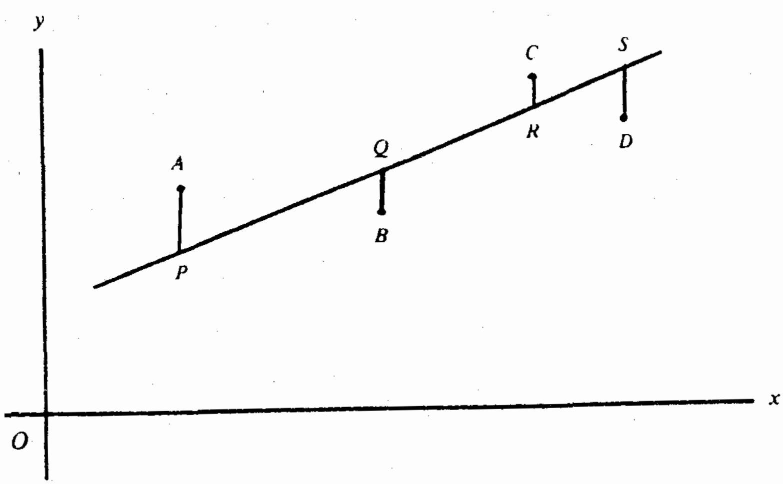
برای xهای ۱، ۳، ۵ و ۷ از داده‌های (۱)، مقدارهای متناظر y، برابر است با ۳، ۴، ۶ و ۷. در خط راست $y=mx+b$، yهای متناظر با x (برای ۱، ۳، ۵ و ۷)، به‌ترتیب چنین‌اند:

$$m+b,\quad ۳m+b,\quad ۵m+b,\quad ۷m+b$$

روش حداقل مربع‌ها، به‌این‌معناست که روشی برای حداقل‌کردن عبارت زیر پیدا کنیم:

$$(m+b-۳)^۲+(۳m+b-۴)^۲+ \\ +(۵m+b-۶)^۲+(۷m+b-۷)^۲ \qquad (۲)$$

در واقع، دو مجموعه از مقدارهای y را در نظر گرفته‌ایم: مجموعهٔ مقدارهای y در نقطه‌های مفروض، و مجموعهٔ مقدارهای y حاصل از خط تقریب؛



شکل ۱۰۱۵–a

سپس، مجموع مربع‌های تفاضل‌های yهای نظیر را به‌دست آورده‌ایم. باتوجه به‌شکل ۱.۱۰-a، مجموع (۲)، از نظر هندسی، عبارت‌است‌از

$$PA^{۲}+QB^{۲}+RC^{۲}+SD^{۲} \qquad (۳)$$

که درآن، A، B، C، D، همان نقطه‌های مفروض (۱) و P، Q، R و S، نقطه‌هایی واقع برخط راست $y=mx+b$ با طول‌هایی، به‌ترتیب، برابر با طول‌های A، B، C و D هستند.

از بازکردن پرانتزها، درمجموع (۲) به‌دست می‌آید:

$$۸۴m^{۲}+۳۲mb^{۲}+۴b^{۲}-۱۸۸m-۴۰b+۱۱۰ \qquad (۴)$$

اگر، باتوجه به مسالـه‌هـای ۴۴.B، ۴۵.B و ۴۶.B درپایان فصل دوم، فرض کنیم:

$$b=B-۴m \qquad (۵)$$

آن‌وقت، چندجمله‌ای درجهٔ دوم (۴)، به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید:

$$۲۰m^{۲}+۴B^{۲}-۲۸m-۴۰B+۱۱۰ \qquad (۶)$$

از مسالـهٔ ۴۴.B مـی‌دانـیم کـه، حـداقـل $۲۰m^{۲}-۲۸m$، بـه‌ازای $m=\frac{۲۸}{۴۰}=۰/۷$، و حداقل $۴B^{۲}-۴۰B$، به‌ازای $B=\frac{۴۰}{۸}=۵$ به‌دست می‌آید؛ و ازبرابری $b=B-۴m$ نتیجه‌می‌شود: $b=۵-۲/۸=۲/۲$.

بنابراین، خط حداقل مربع‌ها، برای مجموعهٔ نقطه‌های (۱)، چنین است:

$$y=۰/۷x+۲/۲ \quad \text{یا} \quad ۷x-۱۰y+۲۲=۰$$

۲.۱۰. خط حداقل مربع‌ها، درحالت‌کلی. در بند قبل، خـط حـداقل مربع‌ها، یا آن‌طور که درآمارشهرت دارد، منحنی‌خطی برگشت را، درحالت خاص و برای چهار نقطهٔ مفروض، پیدا کردیم. اکنون، مساله را، درحالت کلی، و برای مجموعهٔ مفروضی از نقطه‌ها

$$(x_{۱},y_{۱}),\ (x_{۲},y_{۲}),\dots,\ (x_n,y_n) \qquad (۱)$$

حل می‌کنیم. xهای این n نقطه را، n عـدد حقیقی متمایز فرض می‌کنیم. همچنین، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را، به‌ترتیب، واسطهٔ حسابی xهـا و واسطهٔ حسابی yها می‌گیریم، یعنی

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i \quad \text{و} \quad \bar{y}=\frac{1}{n}\Sigma y_i \tag{۲}$$

(برای $i=۱,۲,\ldots,n$). روشن است کـه، معادلهٔ اول (۲) را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\Sigma(x_i-\bar{x})=۰ \tag{۳}$$

برای هرخط راست $y=mx+b$، برای y، با توجه به‌مقدارهای x در (۱)، به ترتیب به‌دست می‌آید:

$$mx_۱+b\ ,\ mx_۲+b\ ,\ldots,\ mx_n+b$$

اکنون، مجموع‌مربع‌های‌تفاضل‌های این yها با yهای مفروض $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n را درنظر می‌گیریم:

$$(mx_۱+b-y_۱)^۲+(mx_۲+b-y_۲)^۲+\ldots+(mx_n+b-y_n)^۲ \tag{۴}$$

باید m و b ر طوری پیدا کنیم‌که مجموع (۴)، حداقل مقدار ممکن باشد. روشن است‌که m و b، برحسب x_i و y_i ازنقطه‌های (۱)، به‌دست‌می‌آیند. نتیجهٔ حاصل را می‌توان، به‌صورت قضیه‌ای تنظیم کرد.

قضیهٔ ۲.۱۵-a. خط حداقل مربع‌ها، برای مجموعهٔ نقطه‌هـای (۱)، به‌صورت $y=mx+b$ است‌که، درآن

$$m=\frac{\Sigma y_i(x_i-\bar{x})}{\Sigma(x_i-\bar{x})^۲} \quad \text{و} \quad b=\bar{y}-m\bar{x} \tag{۵}$$

مثلاً، اگر از دستورهـای (۵) برای مسالـهٔ بند قبلی استفاده‌کنیم، داریم: $\bar{x}=۴$ و $\bar{y}=۵$ و

$$m=\frac{۱۴}{۲۰}=۰/۷ \quad \text{و} \quad b=۵-۰/۷\times۴=۲/۲$$

و خط حداقل مربع‌ها، به‌صورت $y=0/7x+2/2$ درمی‌آیدکه در بند قبل هم به‌آن رسیدیم.

به‌اثبات قضیه می‌پردازیم. بسط مجموع (۴)، منجر به‌یك چندجمله‌ای درجهٔ دوم، برحسب m و b می‌شود که، درآن، ضریب‌های b^2 و mb، به‌ترتیب، برابرند با n و $2\sum x_i$. نسبت مقدار دوم به‌مقدار اول، برابر $\frac{2}{n}\sum x_i$ و یا، به‌صورتی ساده‌تر، به‌صورت $2\bar{x}$ در می‌آید. بنابراین، با توجه به‌مساله‌های B.۴۵ و B.۴۶ درپایان فصل دوم، ازتبدیل

$$b=B-\bar{x}m\,,\quad m=m \tag{6}$$

برای مجموع (۴) استفاده می‌کنیم، به‌چندجمله‌ای درجهٔ دومی، نسبت به‌m و B می‌رسیم که شامل mB نیست [شبیه عبارت (۶) در بند قبل]. تبدیل (۶)، مجموع (۴) را به‌این صورت درمی‌آورد:

$$\sum(mx_i+B-m\bar{x}-y_i)^2=\sum[m(x_i-\bar{x})+(B-y_i)]^2=$$
$$=m^2\sum(x_i-\bar{x})^2+2m\sum(x_i-\bar{x})(B-y_i)+\sum(B-y_i)^2 \tag{7}$$

ازطرف دیگر، باتوجه به (۳)، داریم:

$$\sum(x_i-\bar{x})(B-y_i)=B\sum(x_i-\bar{x})-\sum(x_i-\bar{x})y_i=$$
$$=0-\sum(x_i-\bar{x})y_i$$

بنابراین، مجموع (۷)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$m^2\sum(x_i-\bar{x})^2-2m\sum y_i(x_i-\bar{x})+\sum(B-y_i)^2 \tag{8}$$

به‌یك سه‌جمله‌ای می‌رسیم که، درآن، دوجمله اول شامل m است ولی‌شامل B نیست، و جملهٔ سوم، برعکس، شامل B است وشامل m نیست. به‌این‌ترتیب، برای حداقل‌کردن عبارت (۸)، می‌توانیم، مقدارهای جداگانه‌ای، برای m و B، به‌دست آوریم. حداقل مقدار سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ax^2+bx+c، باضریب‌های ثابت a و b و c و $a>0$، درحالت

$x=-\frac{b}{2a}$ پیش می‌آیـد [مسالهٔ B.۴۴ را ببینید]. به‌این‌ترتیب، حـداقل مجموع دوجملهٔ اول (۸)، وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$m=\frac{\Sigma y_i(x_i-\bar{x})}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

سرانجام، برای حداقل‌کردن جمله آخر درمجموع (۸)، می‌نویسیم:

$$\Sigma(B-y_i)^2=nB^2-2B\Sigma y_i+\Sigma y_i^2$$

که درحالت $B=\frac{1}{n}\Sigma y_i$ یا $B=\bar{y}$ به‌حداقل مقدار خود می‌رسد، که باتوجه به (۶)، به‌دست می‌آید:

$$b=\bar{y}-m\bar{x}$$

قضیهٔ ۲.۱۰-a ثابت شد.

J.۱۰ ثابت‌کنید، برای هرمجموعه‌ای ازعددهای حقیقی x_1، x_2، ...، x_n داریم:

$$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

ثابت‌کنید، علامت برابری، تنها برای وقتی است‌که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n$$

[از نابرابری $\Sigma(x_i-\bar{x})^2\geqslant 0$ استفاده‌کنید.]

۳.۱۰. بهترین پیش‌آمد عدد شانس: اگر یـک تاس را چهار بـار، یا چهار تاس را باهم یك‌بار بیندازیم، بهترین شانس، برای آمدن عدد ۶، چقدر است؟ به‌ظاهر، می‌توان استدلال‌کردکه: چون شانس آمدن ۶ در هرانداختن تاس، برابـر است با $\frac{1}{6}$، بنابراین، وقتی کـه چهار تاس را می‌اندازیم، یا یك

تاس را چهار بـار می‌ریـزیم، شانس آمـدن یکبار ۶، باید برابر $\frac{۴}{۶}$ یـا $\frac{۲}{۳}$ باشد. ولی درعمل، این‌طور نیست.

احتمال آمدن فقط یکبار ۶، در پرتاب چهارتاس، برابراست‌با $\frac{۱۲۵}{۳۲۴}$، یعنی به‌تقریب ۰/۳۹. حتی بالاتـرین احتمال رسیدن به ۶، یعنی حالتی‌که دست‌کم یك‌بار بیاید، برابر است با $\frac{۶۷۱}{۱۲۹۶}$ یا به‌تقریب ۰/۵۲. بنابراین‌باید خیلی خوش‌شانس باشیدکه، دست‌کم یك‌بار، بـه ۶ برسید و نه‌این‌که درهمهٔ موردها، ۶ بیاورید. این‌احتمال‌که در چهاربار پرتاب تاس، درهیچ موردی، ۶ ظاهر نشود، برابر است با $\frac{۶۲۵}{۱۲۹۶}$ و یا به‌تقریب ۰/۴۸.

تحقیق درستی این احتمال‌ها، چندان دشوار نیست. احتمال ظهور ۶، در یك پرتاب تاس، برابر است با $\frac{۱}{۶}$. بنابراین، احتمال‌این‌که درچهارپرتاب متوالی تاس، هربار، عدد ۶ ظاهر شود، برابر با $\left(\frac{۱}{۶}\right)^۴$ واحتمال‌ظاهرنشدن ۶ درهیچ‌کدام از تاس‌ها، برابر با $\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴$ است. بنابه‌نظریهٔ مقدماتی‌احتمال، می‌دانیم‌که جمله‌های متوالی بسط

$$\left(\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}\right)^۴=\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴+۴\left(\frac{۵}{۶}\right)^۳\left(\frac{۱}{۶}\right)+۶\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲\left(\frac{۱}{۶}\right)^۲+$$
$$+۴\left(\frac{۵}{۶}\right)\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳+\left(\frac{۱}{۶}\right)^۴$$

معرف ظهور ۰بار، ۱ بار، ۲بار، ۳بار، و ۴بـار عـدد ۶، در چهار پرتاب تاس است. عـددهایی‌که در بـالا آوردیـم، به‌سادگی از همین بسط به‌دست می‌آیند. بالاترین احتمال، برابر است با $\left(\frac{۵}{۶}\right)^۴$ که متناظر با حالتی‌که، در

پرتاب چهاربار تاس، هرگز عدد ۶ ظاهر نشود.

اکنون، روش ساده‌ای را می‌آوریم که، به‌کمک آن، بتوان میزان احتمال را دریك رشته آزمایش متوالی، بدون این‌که به‌محاسبه‌های طولانی نیازباشد، پیدا کرد. دربرخی‌موقعیت‌ها، تنها یك‌عدد، به‌عنوان عددموفقیت، وجود ندارد، بلکه برای بهترین احتمال وقوع حادثه، دوعدد پیدا می‌شود. قضیهٔ زیر، مطلب را روشن می‌کند.

قضیهٔ ۳.۱۰–a. فرض‌کنید، احتمال وقوع حادثه‌ای برابر p باشد. در n آزمایش متوالی، تعداد وقوع حادثه، دربهترین حالت خود، باعدد درست k بیان می‌شودکه به‌صورت زیر می‌توان آن را پیدا کرد: اگر $np+p$ عددی درست نباشد، k، عدد منحصربه‌فرد درستی است‌که بین دو عدد $np+p-۱$ و $np+p$ قرار دارد

$$np+p-۱<k<np+p \qquad (۱)$$

ولی، اگر $np+p$ عددی درست باشد، آن‌وقت، دوعدد درست برای k وجود داردکه شانسی برابر دارند

$$k=np+p \quad \text{و} \quad k=np+p-۱ \qquad (۲)$$

به‌عنوان نمونه، به‌مثال ابتدای بند برمی‌گردیم: تاس را چهاربار انداخته‌ایم و منتظر حادثهٔ ظهور ۶ هستیم. دراین‌جا $p=\frac{۱}{۶}$ و $n=۴$. می‌بینیم $np+p=\frac{۵}{۶}$؛ عددی درست نیست. با توجه به(۱) معلوم‌می‌شود که $k=۰$، و این، بهترین شانس، برای وقوع این حادثه است.

نمونهٔ دیگری می‌آوریم. تاس را ۲۳ بار می‌اندازیم؛ احتمال ظهور ۶، چندبار است؟ داریم: $p=\frac{۱}{۵}$ و $n=۲۳$، بنابراین $np+p=۴$. با موقعیتی روبه‌رو هستیم که، درآن، $np+p$ عددی درست است. باتوجه به (۲)، عدد شانس (یعنی تعداد احتمالی ظهور۶) برابر است با ۳ یا۴. این‌دو احتمال، شانس برابر دارند.

بهاثبات قضیه میپردازیم. $q=1-p$ میگیریم. q، احتمال عدم وقوع حادثه را بهما میدهد. اگر n آزمایش متوالی را درنظر بگیریم، احتمال وقوع حادثه درهمهٔ این آزمایشها، برابر p^n و احتمال عدم وقوع آن، درهمه آزمایشها، برابر q^n است. بهطور کلی میدانیم که، احتمال عدم وقوع یک، دو،...، یا n بار حادثه دراین n آزمایش را، بهکمک جملههایی که از بسط $(q+p)^n$ بهدست میآید، محاسبه میکنند. جملههای بسط $(q+p)^n$ چنین اند:

$$q^n, nq^{n-1}p, \binom{n}{2}q^{n-2}p^2, \ldots, \binom{n}{j}q^{n-j}p^j, \ldots, p^n \qquad (3)$$

کهدرآن $\binom{n}{j}$، ضریب دو جملهای است، یعنی: $\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$ جملهٔ $\binom{n}{j}q^{n-j}p^j$، احتمال وقوع j بار حادثه را در n آزمایش متوالی، نشان میدهد. $n+1$ جملهٔ بسط را، بهصورت نمادی، بهاینترتیب، نامگذاری میکنیم.

$$T_0, T_1, T_2, \ldots, T_j, \ldots, T_n \qquad (4)$$

نسبتهای جملههای پشتسرهم، چنین اند:

$$\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_1}, \ldots, \frac{T_j}{T_{j-1}}, \frac{T_{j+1}}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_{n-1}} \qquad (5)$$

این نسبتها را، میتوان بهراحتی محاسبه کرد:

$$\frac{np}{q}, \frac{(n-1)p}{2q}, \frac{(n-2)p}{3q}, \ldots,$$

$$\frac{(n-j+1)p}{jq}, \frac{(n-j)p}{(j+1)q}, \ldots, \frac{p}{nq} \qquad (6)$$

میبینیم که، در دنبالهٔ (۶)، صورت کسرها مرتباً کوچك ومخرج کسرها مرتباً بزرگ میشوند. بنابراین نسبتهای (۶)، و درنتیجه نسبتهای (۵)، یك دنبالهٔ نزولی را تشکیل میدهند. بهطور طبیعی، پرسشی پیش میآید: کدام یك ازاین کسرها بزرگتر از واحد وکدام یك کوچکتر از واحدند؟

فرض می‌کنیم، j جملهٔ اول دنبالهٔ (۵) یا دنبالهٔ (۶) بزرگترازواحد وبقیه، کوچکتر از واحد باشند، یعنی داشته باشیم:

$$T_0<T_1<T_2<\ldots<T_j \quad و \quad T_j>T_{j+1}>\ldots>T_n$$

درواقع، بزرگترین جمله را در (۴)، T_j گرفته‌ایم. البته، ممکن است این وضع هم پیش‌آیدکه جمله‌ای از دنبالهٔ (۵) برابر واحد باشد، مثلاً $\frac{T_j}{T_{j+1}}=1$. دراین‌حالت، دو جملهٔ بزرگتر در دنبالهٔ (۴) وجود دارد: T_j و T_{j+1}.

ابتدا به‌حالتی می‌پردازیم که، در (۵) یا (۶)، جمله‌ای برابر واحد وجود نداشته باشد وفرض می‌کنیم:

$$\frac{T_j}{T_{j-1}}>1 \quad و \quad \frac{T_{j+1}}{T_j}<1$$

که آن‌ها را، به‌این‌صورت هم می‌توان نوشت:

$$\frac{(n-j+1)p}{jq}>1 \quad و \quad \frac{(n-j)p}{(j+1)q}<1$$

ازاین دونابرابری و باتوجه به‌برابری $q=1-p$، به‌دست می‌آید:

$$np+p>j \quad و \quad np+p-1<j$$

به‌این‌ترتیب، عدد درست j، که برای آن T_j بزرگترین جملهٔ (۴) است، بین $np+p-1$ و $np+p$ قرار می‌گیرد. همین عدد بودکه، درصورت قضیه، آن را k نامیده‌ایم.

اکنون، امکان‌دوم را درنظر می‌گیریم، وقتی‌که در دنبالهٔ نزولی(۵)، جمله‌ای برابر واحد داشته باشد، مثلاً

$$\frac{T_j}{T_{j-1}}=1 \Rightarrow \frac{(n-j+1)p}{jq}=1$$

که از آن جا، به‌دست می‌آید: $j=np+p$؛ و در دنبالهٔ (۴)، دو جملهٔ T_j و T_{j-1} باهم برابر و از همه جمله‌های دیگر بزرگترند. دربیان قضیه برای این دو احتمال، ازنماد k استفاده شده است وبنابراین، در این‌حالت

$k=np+p-۱$ و $k=np+p$.

مثال. «موفقیت» را، آمدن سه شیر، در پرتاب سه سکه باهم می‌گیریم. اگر سه‌سکه را ۶ بار بیندازیم، احتمال «موفقیت» چقدر است؟ در ۷ بار چطور؟

احتمال آمدن شیر در پرتاب سه سکه برابر است با $\frac{۱}{۸}$، بنابراین در ۶ پرتاب، شانس «موفقیت» برابر صفر و در ۷ پرتاب برابر ۱ یا صفر است.

اگر p احتمال وقوع حادثه در یک آزمایش باشد، از قضیه a-۳.۱۰ روشن می‌شود که، عدد «موفقیت»، در n آزمایش، به np نزدیک است. قضیهٔ برنولی می‌گوید که، عدد «موفقیت»، باید به مفهوم دقیق خود، به np نزدیک باشد. فرض کنید، ε، عددی مثبت و به دلخواه کوچک باشد. قضیهٔ برنولی (که به قانون «عددهای بزرگ» مشهور است و ما، در این‌جا، به‌اثبات آن نمی‌پردازیم) می‌گوید: اگر k را، عدد «موفقیت»، در n آزمایش فرض کنیم، آن‌وقت، احتمال

$$np-n\varepsilon<k<np+n\varepsilon$$

وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر واحد می‌شود.

در ابتدای این بند، مساله‌ای آوردیم و روشن کردیم که درک شهودی ما، ممکن است دچار اشتباه شود. نمونهٔ دیگری از این مورد را، می‌توان در اصطلاح عام «قانون واسطه‌ها» پیدا کرد که، اغلب، به‌صورتی گمراه کننده، مورد استفاده قرار می‌گیرد. آیا در بازی بسکتبال، کسی که چهار توپ آزاد به‌طرف حلقه می‌اندازد، دست کم، شانس یک موفقیت را دارد؟ آیا در ۶ پرتاب آزاد، دست کم ۳ موفقیت وجود دارد؟ اغلب مردم، به‌این پرسش‌ها، پاسخ مثبت می‌دهند. در واقع، «قانون واسطه‌ها»، به‌تعبیری، با «قانون عددهای بزرگ» رابطه دارد.

همین مساله را می‌توان، برای پرتاب سکه مطرح کرد. آیا در چهار پرتاب سکه، دست کم دوبار شیر می‌آید و یا یک بار، در پرتاب دو سکه؟ آیا رسیدن به سه‌شیر از ۶ پرتاب، موقعیت مساعدتری است یا رسیدن به ۴ شیر

از ۸ پرتاب؟ پاسخ به‌این پرسش‌ها مشکل نیست و ما آن را درمساله J ۵۰ آورده‌ایم.

J۲۰. دست‌کم چندبار باید یك جفت تاس را بیندازیم تا احتمال وجود حداقل یکبار ۷ یا ۱۱، برای‌مجموع عددهای دو تاس، بیشتراز $\frac{1}{2}$ باشد؟

J۳۰. یك تاس را آن‌قدر می‌اندازیم تا یکی ازعددها تکرار شود،مثلاً دراین دنباله: ۳، ۶، ۵، ۱، ۴، ۵. کمترین تعداد پرتاب تاس چقدر باشد تا شانس این تکرار، دست‌کم پنجاه ـ پنجاه باشد؟

J۴۰. یك‌تاس را آن قدر پرتاب‌می‌کنیم تاعدد پرتاب اول تکرارشود، مثلاً ۳، ۶، ۵، ۱، ۴، ۵، ۱، ۳. کمترین تعداد پرتاب تاس چقدر باشد تا احتمال چنین تکراری، دست‌کم، برابر $\frac{1}{2}$ شود؟

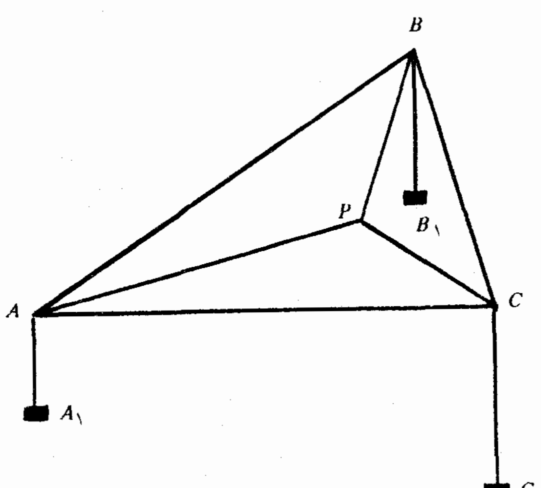
J۵۰. p را احتمال موفقیت بازی‌کن بسکتبال در هر پرتاب آزاد می‌گیریم. I. به‌ازای چه‌مقداری از p، بازی‌کن این شانس را داردکه در ۲ پرتاب از ۴ پرتاب و در ۱ پرتاب از ۲ پرتاب خود موفق شود؟ II. $P(n،2n)$ را احتمال دست‌کم n گل از $2n$ پرتاب فرض می‌کنیم. به شرط $p=\frac{1}{2}$، ثابت کنید:

$$P(1،2)>P(2،4)>P(3،6)>\ldots>$$
$$>P(n،2n)>P(n+1،2n+2)>\ldots$$

J۶۰. مسالهٔ یکی بودن روز تولد. حداقل چندنفر را باید درنظربگیریم تا شانس یکی‌بودن تاریخ تولد دونفر یا بیشتر، بهتر از پنجاه ـ پنجاه باشد؟ [لازم نیست، سال تولد یکی‌باشد، تنها کافی‌است روز وماه تولد باهم‌تطبیق کند. ۲۹ فوریه را (درسال‌کبیسه) برای روز تولدکنار بگذارید، که البته تفاوت زیادی درحل مساله پیدا نمی‌شود. همچنین، فرض را براین‌بگیریدکه بقیهٔ ۳۶۵ روز سال، برای روز تولد، شانس برابر دارند.]

۴.۱۰. راه‌حل‌های تجربی برای مساله‌های مربوط به‌حداقل. دربند ۲.۹، با راه‌حل‌هندسی مسالهٔ فرما (پیدا کردن‌نقطهٔ P، به‌نحوی که‌مجموع فاصله‌هـای آن از سه راس مثلث، کمترین مقدار ممکن بـاشد) آشنا شدیم. اکنون، با استفاده ازمکانیك وساده‌ترین ویژگی نیرو، راه‌حل دیگری برای آن می‌آوریم. ازاین شیوهٔ راه‌حل، که در واقع راه‌حلی تجربی است، می‌توان درموردبسیاری ازمساله‌های بغرنج، که راه‌حل هندسی مقدماتی ندارند (مثل مساله‌های فصل قبل)، استفاده‌کرد.

به‌مسالهٔ فرما برگـردیم. مثلث مفروض ABC را، درصفحه‌ای افقی درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به‌هر راس آن، قرقره‌ای وصل باشد. سه قطعه نخ، که درنقطهٔ P (در درون مثلث) به‌هم بسته شده‌اند، به‌ترتیب از طریق قرقره‌های راس‌هـا، عبورکـرده‌اند (شکل ۴.۱۰-a). به انتهای این نخ‌ها، سه‌وزنهٔ‌برابر A_1، B_1 و C_1 را آویخته‌ایم. به‌این ترتیب، پاره‌خط‌های PA، PB و PC درصفحهٔ افقی‌واقع‌اند و پاره‌خط‌های AA_1، BB_1 و CC_1 به‌صورت‌قائم قرارگرفته‌اند. دستگاه را به‌صورت‌آزاد رها می‌کنیم تابه‌حالت تعادل خـود درآید. ثابت می‌کنیم کـه، در این صورت، P بـر نقطهٔ فرمای



شکل ۴.۱۰-a

مثلث منطبق است، یعنی $PA+PB+PC$، به‌حداقل خود می‌رسد.

وزنه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$، وقتی به‌موقعیت طبیعی خود می‌رسند که مرکز ثقل دستگاه وزنه‌ها، در پایین‌ترین وضع ممکن خود قرار گیرد. واین، به‌معنای آن است که مجموع فاصله‌های

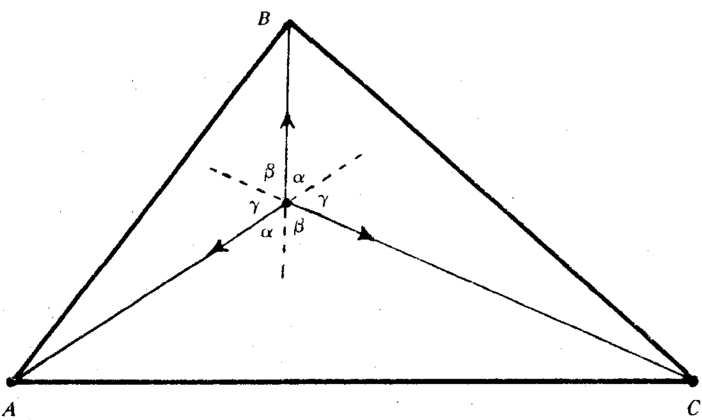
$$AA_۱+BB_۲+CC_۱ \qquad (۱)$$

ماکزیمم باشد. ولی کل طول این سه نخ، یعنی

$$(PA+PB+PC)+(AA_۱+BB_۱+CC_۱)$$

مقداری ثابت است؛ وچون حالت تعادلی دستگاه، مجموع (۱) را ماکزیمم می‌کند، بنابراین به خودی خود، مجموع $PA+PB+PC$ را می‌نیمم خواهدکرد.

اکنون ثابت می‌کنیم که، دراین موقعیت، هریك ازضلع‌های مثلث، از نقطهٔ P به‌زاویهٔ ۱۲۰ درجه دیده می‌شوند، برای این منظور، هر یك از پاره‌خط‌های AP، BP و CP را، از طرف P، اندکی امتداد می‌دهیم (در شکل ۴.۱۰-b)، این امتدادها به‌صورت «خطچین» نشان داده شده‌اند). در نقطهٔ P، شش زاویه به‌دست می‌آیدکه، دوبه‌دو، باهم برابرند.این زاویه‌ها را با α، β و γ نشان داده‌ایم. سه نیرویی که در امتداد پاره‌خط‌های PA،



شکل ۴.۱۰—b

PB و PC اثر می‌کنند، باهم برابرند، زیرا وزنه‌ها را برابر گرفته‌ایم. این نیرو را w می‌نامیم. تعادل دستگاه، به‌این معناست که نیروها درحالت‌تعادل‌اند این نیروی تعادل، مثلاً در امتداد PA، برابر است با

$$w = w\cos\alpha + w\cos\gamma \Rightarrow ۱ = \cos\alpha + \cos\gamma \qquad (۲)$$

به‌همین‌ترتیب، معادله‌های متناظر با PB و PC به‌دست می‌آیند.

$$۱ = \cos\alpha + \cos\beta ، \quad ۱ = \cos\beta + \cos\gamma \qquad (۳)$$

از (۲) و (۳) به‌سادگی نتیجه می‌شود: $\alpha = \beta = \gamma$ وچون، این سه‌زاویه، مجموعی‌برابر۱۸۰درجه دارند، بنابراین $\alpha = \beta = \gamma = ۶۰^\circ$. به‌این‌ترتیب، هریك از زاویه‌های APB، APC و BPC برابر ۱۲۰ درجه می‌شود.

مسالهٔ فرما را، به‌کمك مکانیك، حل‌کردیم. می‌توانیم مسالهٔ فرما را ازنظر عملی، بغرنج‌تر طرح و بازهم آن را، به‌یاری مکانیك، حل‌کنیم. می‌دانیم که مسالهٔ فرما را مسالهٔ فرودگاه هم می‌گویند. مسالهٔ فرودگاه را به‌این‌صورت درمیان می‌گذاریم: می‌خواهیم، برای سه‌شهر A، B و C، فرودگاهی درنقطهٔ P بسازیم. می‌دانیم شهرهای A و B و C، به‌ترتیب، دارای جمعیت‌های $p_۱$ و $p_۲$ و $p_۳$ هستند. باید فرودگاه P در جایی ساخته شود که مجموع فاصله‌هایی که مردم سه‌شهر، برای رسیدن به‌فرودگاه، طی می‌کنند، حداقل مقدارممکن باشد. در واقع، باید نوعی تناسب، بین جمعیت شهرها و فاصلهٔ آن‌ها تا فرودگاه، برقرار باشد. دراین‌جا، به‌جای مجموع سادهٔ $PA + PB + PC$، باید مجموع زیر را می‌نیمم‌کنیم:

$$p_۱(PA) + p_۲(PB) + p_۳(PC) \qquad (۴)$$

زیرا، دراین مجموع، رفت وآمد جمعیت هر شهر درجادهٔ مربوط به‌خودش، درنظرگرفته شده است.

ثابت می‌کنیم که این مساله را هم می‌توان، به‌کمك وزنه‌های نابرابر $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$، متناسب باجمعیت‌های $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$، که درنقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ قرارمی‌دهیم، حل‌کرد. اگر دستگاه قرقره‌ها و وزنه‌ها طوری‌باشند

که سه نخی که از P به‌وزنه‌ها منتهی می‌شونـد، طولی برابر داشته باشند، حل مساله ساده‌تر خواهـد شد (اگرچه، با نخ‌هـای به‌طول‌هـای نابرابرهم می‌توان مساله را حل کرد، منتهی باپیچیدگی بیشتری). طول هرکدام ازاین نخ‌ها را d می‌گیریم، یعنی

$$PA+AA_1=PB+BB_1=PC+CC_1=d$$

تعادل دستگاه وقتی ظاهرمی‌شودکه، مرکز ثقل وزنه‌ها، درپایین‌ترین وضعیت ممکن باشد، یعنی وقتی‌که مجموع

$$w_1(AA_1)+w_2(BB_1)+w_3(CC_1) \qquad (5)$$

حداکثر مقدار ممکن باشد. [این، افت انـرژی پتانسیل دستگاه وزنه‌ها، را وقتی ازصفحهٔ ABC به‌موقعیت تعادلی خـود می‌رسد، نشان می‌دهد.] اما، مجموع کلی

$$w_1(PA+AA_1)+w_2(PB+BB_1)+w_3(PC+CC_1)=$$
$$=d(w_1+w_2+w_3) \qquad (6)$$

مقداری ثابت‌است و، بنابراین، موقعیت‌تعادلی؛ وقتی پیش می‌آیدکه‌مجموع

$$w_1(PA)+w_2(PB)+w_3(PC) \qquad (7)$$

به‌حداقل مقدار خود بـرسد. اگر w_1، w_2 و w_3 متناسب با p_1، p_2 و p_3 باشند، آن‌وقت (۷) با (۴) متناسب می‌شود و، ازآن‌جا، حداقل (۴) وقتی ظاهر می‌شودکه P، درموقعیت تعادلی باشد. این‌حالت، نسبت به‌حالت‌سادهٔ مسالهٔ فرما، وضع دشوارتری دارد ومحاسبهٔ زاویه‌هـا را، با اشکال بیشتری روبه‌رو می‌کند. دراین‌جا، معادلهٔ (۲)، به‌صورت

$$w_1=w_2\cos\alpha+w_3\cos\gamma \qquad (8)$$

ومعادله‌های متناظر امتدادهای دیگر، به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$w_2=w_1\cos\alpha+w_3\cos\beta, \quad w_3=w_1\cos\gamma+w_2\cos\beta \qquad (9)$$

البته، باهمان شرط $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. اما‌دست‌یافتن به‌$\alpha$،$\beta$و$\gamma$ برحسب

w_1 و w_2 و w_3، به‌کمک این‌معادله‌ها، با روش‌های مقدماتی میسر نیست. ولی، اگر معادله‌های نیروهای تعادل را، درامتداد عمودبر PA، PB و PC بنویسیم، به‌رابطه‌های ساده‌تری می‌رسیم:

$$w_2 \sin\alpha = w_3 \sin\gamma, \quad w_1 \sin\alpha = w_3 \sin\beta, \quad w_1 \sin\gamma = w_2 \sin\beta$$

این سه‌معادله، مستقل ازهم نیستند و بادردست‌داشتن هردومعادله، می‌توان معادلهٔ سوم را به‌دست آورد. باوجود این، جای نقطهٔ P، که ازنظرمکانیکی وتجربی، معین شده است، ازنظر محاسبه‌ای، برای ما باز می‌ماند، زیرا نمی‌توانیم α، β و γ را، با روش‌های مقدماتی ریاضی، برحسب w_1، w_2 و w_3 پیدا کنیم.

می‌توان‌مساله‌های مشابهی، برای‌تعمیم قضیه فرما (یا مسالهٔوزنه‌های فرما)، برای دستگاهی‌که با بیش‌از سه نقطه سروکار داشته باشد، طرح کرد. حالت کلی را، وقتی‌که n نقطه داشته باشیم، نمی‌توان باروش‌های مقدماتی ریاضی حل کرد، درحالی‌که به‌کمک تجربه و به‌صورت مکانیکی می‌توان به‌جواب رسانید.

۵۰۱۰. قضیهٔ بطلمیوس. برای بحث بعدی خود، دربارهٔ شکست‌نور، به‌قضیه‌ای نیاز داریم‌که دراین‌جا می‌آوریم.

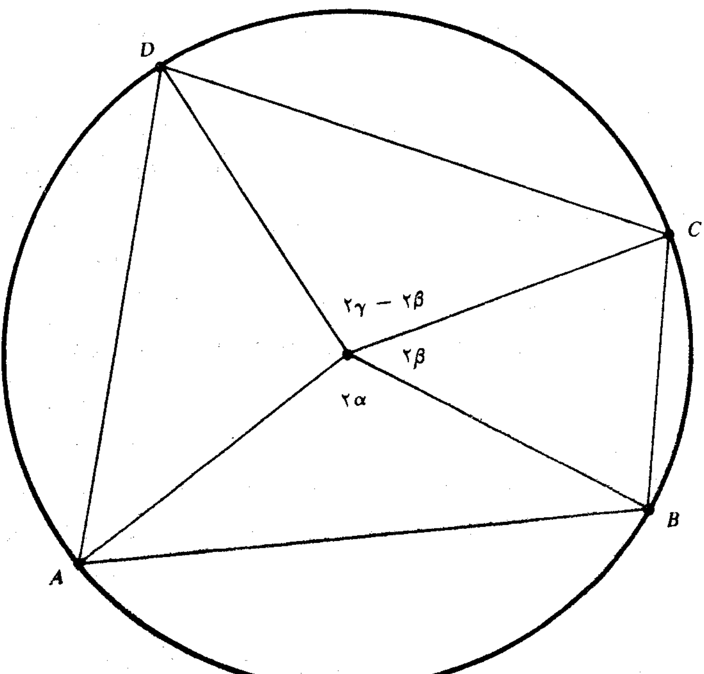
قضیهٔ ۵۰۱۰–a. اگر A، B، C و D، چهارنقطهٔ متمایز و دلخواه از صفحه باشند، آن‌گاه

$$AB.CD + AD.BC \geqslant AC.BD \qquad (1)$$

علامت‌برابری، تنها برای یکی از دوحالت پیش می‌آید: I. وقتی‌که A، B، C و D، باهمین ردیف، روی محیط دایره‌ای واقع باشند؛ II. وقتی‌که A، B، C و D، روی یك خط راست باشند و، درضمن، تنها یکی از دونقطهٔ B یا D، بین دونقطهٔ A و C واقع باشد. [اگر خط‌راست را به‌عنوان‌دایره‌ای با شعاع بی‌نهایت قبول کنیم، شرط II، حالت خاصی ازهمان شرط I، خواهد بود.]

این قضیه، در واقع، تعمیمی از قضیهٔ بطلمیوس است که، بنابرآن؛ در هر چهارضلعی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های ضلع‌های روبه‌رو. ماهم، دراین‌جا، همین جزء از قضیهٔ a-۵.۱۰ را ثابت می‌کنیم. خواننده‌ای که علاقه‌مند به‌اثبات قضیه، درحالت کلی باشد، باید به‌کتاب‌های اختصاصی هندسه، مراجعه کند.

A، B، C و D را، چهارنقطه برمحیط دایره‌ای می‌گیریم، به‌نحوی که به‌همین ردیف ومثلاً درجهت مثلثاتی (عکس جهت حرکت‌عقربه‌های ساعت) آمده باشند. زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به‌کمان‌های AB، BC و BD را، به‌ترتیب، ۲α، ۲β و ۲γ می‌نامیم (شکل a-۵.۱۰). بدون‌این‌که لطمه‌ای به‌کلی بودن مساله وارد شود، می‌توانیم شعاع دایره را واحد بگیریم. دراین‌صورت، مثلاً طول‌وتر AB برابر ۲$sin\alpha$ می‌شود (توجه‌کنیم



شکل a-۵.۱۰

که، این نتیجه، حتی برای موردی‌که 2α از ۱۸۰ درجه هم بزرگتر باشد، درست است). زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به‌کمان‌های CD، AD و AC، به‌ترتیب، چنین‌اند.

$$2\gamma-2\beta, \quad 360^\circ-2\alpha-2\gamma, \quad 2\alpha+2\beta$$

باید ثابت کنیم: $AC.BD=AB.CD+AD.BC$. به‌جای این طول‌ها، مقدار آن‌ها را برحسب سینوس زاویه‌ها می‌گذاریم، به‌این برابری‌می‌رسیم:

$$\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

که با بسط $\sin(\gamma-\beta)$ ، $\sin(\alpha+\gamma)$ و $\sin(\alpha+\beta)$، به‌سادگی روشن می‌شود که، این برابری، یك اتحاد است.

کلود بطلمیوس، اخترشناس، ریاضی‌دان‌وجغرافیادان سدهٔ دوم‌میلادی است. شهرت او به‌خاطر دستگاه پیچیده‌ای است‌که برای توجیه حرکت سیاره‌ها وستاره‌ها به‌دور زمین درست‌کرد. نظریهٔ بطلمیوس سده‌های متوالی مورد قبول بود، تا این‌که‌کوپرنیك، درسال ۱۵۳۰ میلادی، ثابت‌کردکه زمین دور محور خودش می‌چرخد و سیاره‌ها، روی مداری به‌دور خورشید درگردش‌اند.

۷.J. اگر P نقطهٔ دلخواهی ازصفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، ثابت‌کنید: $PA+PB\geqslant PC$. باچه شرطی، نابرابری، به‌برابری تبدیل می‌شود؟

۸.J. آیا مثلث‌هایی مثلABC وجود دارندکه، برای آن‌ها،نابرابری $PA+PB>PC$، برای هرنقطهٔ P ازصفحهٔ مثلث، برقرار باشد؟ اگرپاسخ مثبت است، همهٔ این‌گونه مثلث‌ها را پیدا کنید، و اگر پاسخ منفی است،آن را ثابت‌کنید.

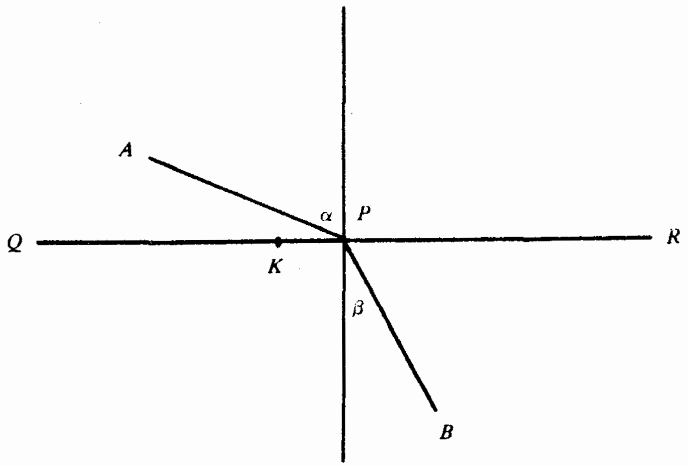
۶.۱۰ شکست نور. وقتی‌نور، ازمحیطی‌واردمحیط‌دیگری‌بشود ـ مثلاً از هوا وارد آب شود ـ می‌شکند، یعنی از مسیرمستقیم خود منحرف‌می‌شود

و امتداد حرکت خود را تغییر می‌دهد. در شکل ۶.۱۰-a، مسیر حرکت نور از نقطه A به نقطهٔ B، در نقطهٔ P که با محیط دوم برخورد کرده شکسته است و روی دو پاره‌خط AP و PB آمده‌است. این همان پدیده‌ای است که موجب می‌شود، وقتی جسمی را روی یک خط راست وارد آب کنیم، مسیر حرکت آن را در آب، به‌صورت منحنی ببینیم.

سرعت نور را در محیط بالای مرز QR برابر v_1 و در محیط زیر آن، برابر v_2 می‌گیریم. مساله این است که، اگر دو نقطهٔ A و B ثابت باشند، نقطهٔ P را روی QR طوری پیدا کنیم که زمان لازم برای عبور نور از A به P و سپس از P به B، حداقل مقدار ممکن باشد. [این مساله، به اصل فرما یا اصل حداقل زمان مشهور است.] می‌دانیم که حرکت روی خط راست، به مسافت s، با معادلهٔ $s=v.t$ مشخص می‌شود که، در آن، v سرعت و t زمان حرکت است. بنابراین، مسالهٔ ما به این جا منجر می‌شود: نقطهٔ P را روی QR طوری پیدا کنیم که

$$\frac{AP}{v_1}+\frac{PB}{v_2} \qquad (1)$$

حداقل مقدار ممکن باشد.



شکل ۶.۱۰-a

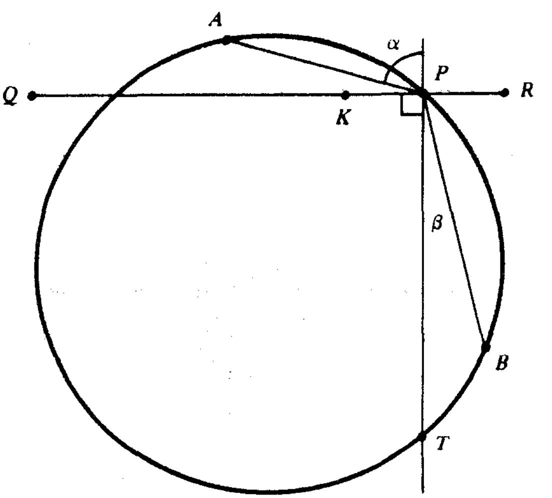
زاویهٔ بین AP وعمود وارد بـر QR درنقطهٔ P را α و زاویـهٔ بین BP وعمود وارد بر QR درنقطهٔ P را β می‌نامیم (شکل a-۶.۱۰)، ثابت می کنیم، نقطهٔ P باید درجایی باشدکه، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2} \qquad (۲)$$

[قانون اسنل Snell]؛ یعنی اگر برابری (۲) برقرار باشد، آن‌وقت، حرکت از A به B، ازطریق نقطهٔ P، باحداقل زمان انجام می‌شود ومقدار (۱) به حداقل ممکن می‌رسد. نقطهٔ K را، غیراز P، روی QR درنـظر می گیریم، باید داشته باشیم:

$$\frac{AP}{v_1}+\frac{PB}{v_2}<\frac{AK}{v_1}+\frac{KB}{v_2} \qquad (۳)$$

دایره‌ای را درنـظر می گیریـم کـه از نقطه‌هـای A، P و B بگذرد (شکل b-۶.۱۰). فرض می کنیم، عمود وارد بر QR درنقطهٔ P، دایره را درنقطهٔ دیگری مانند T قطع کند. باتوجه به‌قضیهٔ بطلمیوس، برای چهار نقطهٔ



شکل b-۶.۱۰

A، P، B و T، داریم:

$$AP.BT+AT.PB=AB.PT$$

ولی اگر قضیهٔ ۵.۱۰-a را برای چهار نقطهٔ A، K، B و T (که برمحیط یك دایره واقع نیستند). به کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$AK.BT+AT.KB>AB.KT$$

ازاین دو رابطه، و باتوجه به‌نابرابری $RT<KT$، نتیجه می‌شود.

$$AP.BT+AT.PB<AK.BT+AT.KB \qquad (۴)$$

چون BT ازنقطهٔ P به‌زاویهٔ β دیده می‌شود، بنابراین، زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به BT برابر ۲β است و درنتیجه $BT=۲r\sin ۲\beta$ (r، شعاع‌دایره است). به‌همین‌ترتیب، AT ازنقطهٔ P به‌زاویهٔ $\pi-\alpha$ دیده می‌شود و، بنابراین

$$AT=۲r\sin(\pi-\alpha)=۲r\sin\alpha$$

از تقسیم دو رابطهٔ اخیر، به‌دست می‌آید: $\frac{AT}{BT}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. ولی، بنا بر فرض، نقطهٔ P برخط راست RQ طوری قرار دارد که $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_۱}{v_۲}$؛ که ازآن‌جا نتیجه می‌شود: $\frac{AT}{BT}=\frac{v_۱}{v_۲}$ و، برای مقدار ثابتی مثل k، داریم: $AT=kv_۱$ و $BT=kv_۲$. اگر این دومقدار را، به‌جای AT و BT در (۴) قرار دهیم:

$$v_۲.AP+v_۱.BP<v_۲.AK+v_۱.KB$$

که باتقسیم دوطرف آن بر $v_۱v_۲$، همان نابرابری (۳) به‌دست می‌آید.

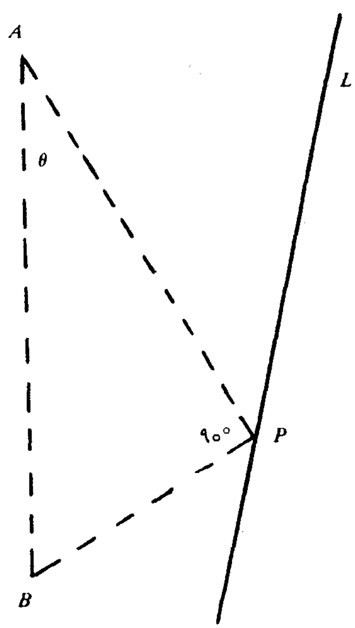
قانون‌شکست‌نور را، به‌نام کاشف‌آن اسنل(Willebrnrd Snell: ۱۵۹۱ - ۱۶۲۶) می‌نامند. شهرت اسنل، به‌خاطر همین کار اساسی‌اوست.

۷.۱۰. مساله‌های مربوط به‌فاصله و زمان

کمترین زمان سقوط. نقطهٔ A و خط‌راست L مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ P را برخط راست L طوری پیدا کنیم که زمان سقوط، درمسیرخط‌راست از A به P، می‌نیمم‌شود؛ حرکت دراثر نیروی ثقل و بدون دخالت اصطکاک انجام می‌شود (شکل a-۷.۱۰).

بعدازحل این مساله خواهیم دید که به سادگی می‌توان، مساله را تعمیم داد و، به‌جای خط‌راست L، یک‌منحنی درنظرگرفت ونقطهٔ P راروی آن به‌دست آورد. درگام اول، نقطهٔ‌دلخواه P را روی خط‌راست L انتخاب و زمان سقوط ازنقطهٔ A تا نقطهٔ P را ـ روی خط‌راست AP ــ محاسبه می‌کنیم.

[درحالت کلی، وقتی هر مسیری مجاز باشد، کمترین زمان سقوط از A به P، درامتداد خط‌راست به‌دست نمی‌آید ولی این‌مساله، که به «مسالهٔ



شکل a-۷.۱۰

حداقل زمان» مشهور است و، همچنین، نوع منحنی مسیر، تا حد زیادی از هدف اصلی این کتاب خارج است.]

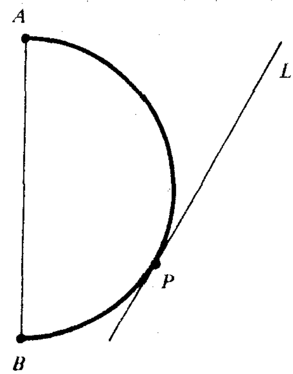
اگر شتاب ثقل را g بگیریم، شتاب درامتداد خط راست AP (شکل a-۷.۱۰)، برابر $g cos\theta$ می‌شود که مؤلفه g درامتدادی است که باخط‌قائم، زاویه‌ای برابر θ می‌سازد. ازفیزیك‌مقدماتی می‌دانیم: $s=\frac{1}{2}at^2$ که مسافت طی‌شده، یعنی s را روی خط راست، در زمان t و باشتاب‌ثابت a، باآغاز از سکون‌درلحظهٔ صفر، به‌ما می‌دهد. دراین‌جا داریم: $s=AP$ و $a=g cos\theta$، بنابراین

$$AP=\frac{1}{2}(g cos\theta)t^2 \Rightarrow t^2=2\sec\theta.\frac{AP}{g} \qquad (1)$$

حداقل t، همزمان با حداقل t^2 از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید چون، g، مقداری ثابت است، باید حداقل $AP.\sec\theta$ را پیدا کنیم. برای این‌منظور، نقطهٔ B را، روی خط قائمی که از A می‌گذرد، طوری انتخاب می‌کنیم که زاویهٔ APB برابر ۹۰ درجه‌باشد (شکل a-۷.۱۰). درضمن، توجه‌می‌کنیم که $AB=AP\sec\theta$. همان‌طور که از ساختمان شکل روشن است، جای نقطهٔ B، بستگی به‌جای نقطهٔ P، دارد. به‌این‌ترتیب، مسأله به‌این‌جا منجر می‌شود که فاصلهٔ AB را می‌نیمم کنیم (وقتی که P، روی L حرکت می‌کند). کلید حل مساله، دایره‌ای است به قطر AB، که ازنقطهٔ P می‌گذرد. باید کوچکترین دایره را، باشرح زیر، پیدا کرد:

برای این‌که سقوط درامتداد خط‌راست از A تا P (که برخط راست L واقع است)، درحداقل‌زمان انجام‌گیرد، باید P را درنقطهٔ تماس‌دایره‌ای گرفت‌که از A می‌گذرد و برخط‌راست L مماس است و مرکز آن روی خط قائمی باشدکه از A می‌گذرد (شکل b-۷.۱۰)

این‌جواب، همراه با این‌نتیجهٔ هندسی است‌که، راس P از زاویهٔ‌قائمه APB برنیم‌دایره واقع‌است. چون $AP.\sec\theta=AB$، باتوجه‌به‌رابطهٔ(۱)، نتیجه می‌شود که زمان سقوط روی خط راست، ازنقطهٔ A تا هرنقطهٔ‌دلخواه نیم‌دایره، مقدار ثابتی است؛ مثلاً، زمان سقوط از A به P، با زمان سقوط



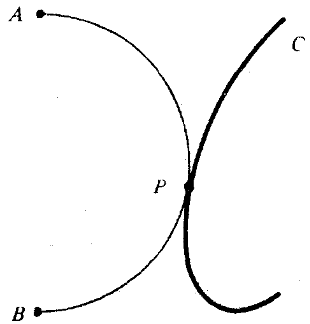
شکل b-۷.۱۵

از A بـه B یکی است. این، در واقـع، همان قضیهٔ معروف‌گالیله است که می‌گوید: مـکان هندسی نقطه‌هـای مـادی که دریـك‌لحظه از نقطهٔ A در امتدادهای مختلف، تحت‌تاثیر نیروی ثقل حـرکت‌کنند، در هر لحظهٔ بعدی، دایره‌ای است‌که مرکز آن برخط‌قائمی‌که از A می‌گذرد، قرار دارد.

اکنون‌روشن است که، ازهمین راه‌حل، می‌توان برای موردی هم‌که، به‌جای خط راست L، بامنحنی دلخواه C سروکار داریم، استفاده‌کرد. باید نقطهٔP را برمنحنیC طوری پیداکرد که زمان سقوط نقطهٔ مادی از A به P، درامتداد خـطراست AP، حداقـل مقدار ممکن بـاشد. در این‌جا هم، اگر کوچکترین دایره‌ای را پیدا کنیم کـه از A بگذرد، مرکز آن برقائمی قرار گیردکه از A عبور می‌کند و برمنحنی C مماس باشد، آن‌وقت، نقطهٔ P بر نقطهٔ تماس این دایره بامنحنی c، منطبق است. (شکل c-۷.۱۰).

J.۹۰ حالتی را درنظر بگیریدکـه خط راست L، قائم باشد و ، البته، ازنقطهٔ A نمی‌گذرد. زاویهٔ θ چقدر باشد تا زمان سقوط، حداقل شود؟

برد افقی. وقتی‌که جسمی، و مثلاً یك توپ‌گلف، باسرعت اولیهٔ v_0 پرتاب می‌شود، بعدازطـی مسافتی به‌زمین می‌رسد؛ مساله حـداکثر مسافت پیموده شده به‌حساب خط افقی، برای مـا مطرح است. در حالت‌هایی‌که v_0 خیلی بزرگ نباشد، می‌توان ازمقاومت هـوا صرف‌نظرکرد وتقریب خوبی



شکل ۰-۷۰۱۰-c

را، که به‌واقعیت نزدیک است، به‌دست آورد (مثل مورد پرتاب وزنه‌های ورزشی). اگر مولفه‌های افقی وقائم‌سرعت را با a و b نشان دهیم،داریم: $v_0^2 = a^2 + b^2$. بنابراین، اگر جسمی که پرتاب شده است، مسیر خود را با زاویهٔ θ ازسطح افق، آغازکند، آن‌گاه $a = v_0 \cos\theta$ و $b = v_0 \sin\theta$.

معادله‌های مسیر، چنین‌اند:

$$x = at, \quad y = bt - \frac{1}{2}gt^2$$

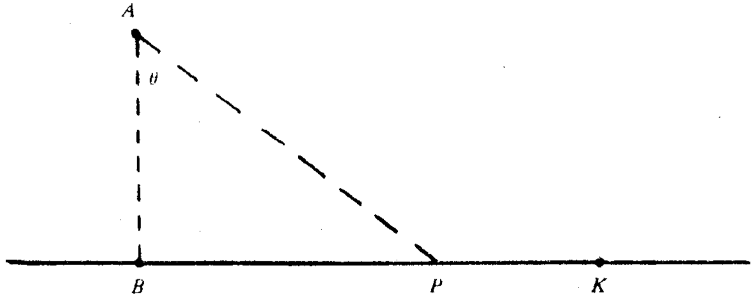
که درآن، (x, y)، مختصات نقطهٔ مسیر درلحظهٔ t است. به‌ازای دومقدار $t = 0$ و $t = \frac{2b}{g}$، به‌دست‌می‌آید: $y = 0$. بنابراین، فاصلهٔ افقی پیموده‌شده، قبل‌ازاین که‌جسم به‌زمین‌برسد، از رابطهٔ $x = at$ و به‌ازای $t = \frac{2b}{g}$ به‌دست می‌آید. مقدارحاصل، یعنی $\frac{2ba}{g}$ را، برد افقی جسم پرتاب شده می‌نامند.

به‌این‌ترتیب، باید شرطهایی‌برای a و b پیداکرد تا،به‌ازای‌آن‌ها،مقدار $\frac{2ab}{g}$ ماکزیمم‌شود. باتوجه به‌نابرابری $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$، نتیجه‌می‌شود که حداکثر مقدار $\frac{2ab}{g}$ برابراست با $\frac{a^2 + b^2}{g}$ که‌برای $a = b$ به‌دست‌می‌آید؛وچون

$v_0^2 = a^2 + b^2$، بنابراین، حداکثر بردافقی برابر است با $\frac{v_0^2}{g}$. این حداکثر، وقتی به‌دست می‌آیدکه جسم را با زاویهٔ ۴۵ درجه نسبت به‌افق پرتاب‌کرده باشیم، زیرا درحالت $a=b$ داریم $cos\theta = sin\theta$ یا $tg\theta = ۱$، یعنی $\theta = ۴۵^\circ$.

J.۱۰ مسالهٔ فانوس دریائی. فانوس دریائی به فاصلهٔ ۲/۵ کیلومتری ساحل قرار دارد. ساحل را بـه‌صورت خطی راست می‌گیریـم. مغازه‌ای در امتداد ساحـل و در ۵ کیلـومتری نقطهٔ Bـ کـه نزدیك‌ترین نقطهٔ ساحل به فانوس دریایی است ـ واقـع است (شکل J.۱۰) نگهبان فـانوس دریائی، برای رفتن بـه‌مغازه، ابتدا با قـایق پـاروئی وسرعت ۳ کیلومتر درساعت، خود را به‌نقطه‌ای مانند P از ساحل می‌رساند و، سپس، باسرکت ۵ کیلومتر در ساعت از P به‌طرف مغازهٔ K می‌رود. نقطهٔ P را درکجا انتخاب‌کند تا، برای رفتن از محل فانوس‌دریایی به‌مغازه، حداقل زمان را مصرف‌کند؟ [از قضیهٔ a-۵.۵ استفاده‌کنید.]

J.۱۱ مسالهٔ مانع. دوچرخه‌سواری، از مبداء مختصـات و درجهت مثبت محور xها باسرعتی ثـابت در مسیر مستقیم‌آغاز به‌حرکت می‌کند. در همان‌لحظه، دونده‌ای ازنقطهٔ P بـه‌مختصات $(c، y)$، به‌قصد جلوگیری از حرکت دوچرخه‌سوار به‌طرف‌محور xها آغاز به‌دویدن می‌کند. سرعت پیاده، نصف‌سرعت دوچرخه‌سوار است. اگر، c، مقدارثابت‌مثبتی‌باشد، حداکثرمقدار y را، به‌عنوان تابعی‌از c، پیداکنید، به‌نحوی که بتوان مانع را ایجادکرد.



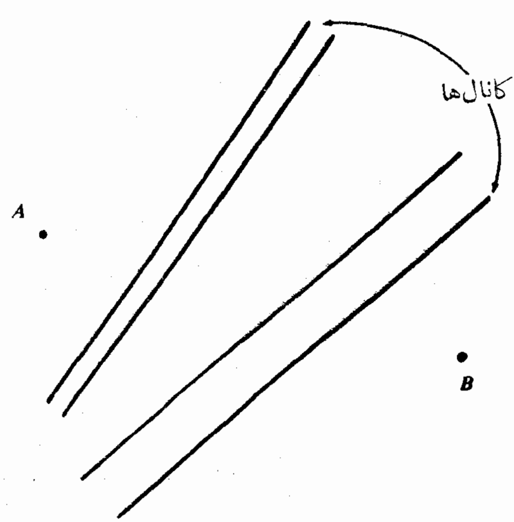
شکل J.۱۰

۱۲۰.J می‌خواهیم جاده‌ای بین دو شهر A و B بسازیم. بین دو شهر، دو کانال وجود دارد. هر کانال، بین دو خط راست موازی قرار دارد، ولی دو کانال، باهم موازی نیستند (شکل J ۱۲۰). پل‌هایی که باید روی کانال‌ها ساخته شود، به‌خاطر کمتر بودن هزینه، عمود بر امتداد کانال‌ها ساخته می‌شود. در چه نقطه‌هایی باید این پل‌ها را ساخت تا کوتاه‌ترین جادهٔ بین دو شهر A و B به‌دست آید؟

۸.۱۰. مساله‌های مینی‌ماکس (minimax). بحث بر سر مساله‌هایی است که‌می‌خواهیم بزرگترین مقدار را از بین مجموعه‌ای ازمقدارهای می‌نیمم و یا، برعکس، کوچکترین مقدار را درمجموعه‌ای ازمقدارهای ماکزیمم پیدا کنیم. به‌این مساله توجه کنید.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد درست ومثبت a و b را، با (a,b) نشان می‌دهیم. می‌خواهیم حداکثر مقدار

$$\min\{(a,b)(a,c),(b,c)\} \qquad (1)$$



شکل J ۱۲۰

را، برای همهٔ عددهای درست و متمایز a و b و c از مجموعهٔ $\{۱،۲،...،۱۰۰\}$، پیدا کنیم. [به‌عنوان مثال، اگر $a=۲۱$، $b=۴۲$ و $c=۷۲$ باشد، داریم: $(a،b)=۲۱$، $(a،c)=۳$ و $(b،c)=۶$ و، درنتیجه، مقدار (۱)، برابر ۳ می‌شود.]

حل. برای $a=۳۳$، $b=۶۶$ و $c=۹۹$ داریم:

$$\min\{(a،b)،(a،c)،(b،c۱)\}=۳۳$$

ثابت می‌کنیم، همین ۳۳، جواب مساله است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید بتوان برای (۱)، عددی مثل k پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم: $k>۳۳$. $(a،b)=k$ می‌گیریم، بنابراین $(a،c)\geqslant k$ و $(b، c)\geqslant k$. چون $۳k>۱۰۰$، بنابراین، فقط می‌توان $a=k$ و $b=۲k$ انتخاب کرد. درنتیجه، $(a،c)\geqslant k$ به‌صورت $(k،c)\geqslant k$ درمی‌آید و به ناچار خواهیم داشت: $(k،c)=k$. چون $c\leqslant ۱۰۰$ و $k>۳۳$، بنابراین $c=k$ یا $c=۲k$. ولی این، ممکن نیست، زیرا بنابه‌فرض a و b و c، سه‌عدد متمایزند.

مساله‌های زیر، شما را درمورد اندیشهٔ مینی‌ماکس روشن‌تر می‌کند. در نظریهٔ بازی‌ها، قضیهٔ مهمی وجود دارد که به «قضیهٔ مینی‌ماکس» مشهور است ولی ما، دراین‌جا، به‌آن نمی‌پردازیم، زیرا ازهدف خود دورمی‌شویم.

۱۳۰.J حداکثر مقدار

$$\min\{PQ، \ PR، \ QR\}$$

را، برای همهٔ موقعیت‌های P و Q و R، درحالت‌های زیر پیدا کنید [منظور از PQ، فاصلهٔ دونقطهٔ P و Q است].

a) بر پاره‌خطی به‌طول واحد قرار دارند؛

b) در داخل یا روی محیط دایره‌ای به‌شعاع واحدند؛

c) در داخل یا روی سطح کره‌ای به‌شعاع واحد قرار دارند؛

d) در داخل یا روی محیط مربعی به‌ضلع واحد، واقع‌اند.

۱۴۰.J $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_۷$، نقطه‌هایی در داخل یا روی محیط دایره‌ای به‌شعاع واحدند. از وصل دوبه‌دوی این نقطه‌ها، ۲۱ فاصله (P_iP_j) به‌دست

می‌آید که کوچکترین آن‌ها را m می‌نامیم. حداکثر مقدار m را، برای همهٔ موقعیت‌های ممکن نقطه‌های P_1، P_2، ...، P_7 پیدا کنید.

۱۵۰J. کوچکترین‌مضرب مشترك دوعدد طبیعی a و b را، به‌صورت $[a،b]$ نشان می‌دهیم، حداکثر مقدار

$$\min\{[a،b]، [a،c]، [b،c]\}$$

را، برای همهٔ سه‌تایی‌های ممتاز aوbوc از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰\}$، پیدا کنید.

۹.۱۵. حرکت جیپ در دشت. جیپی می‌خواهد فاصله‌ای از یك دشت را طی کند. درمبداء حرکت، به اندازهٔ کافی بنزین وجود دارد؛ ولی در راه نمی‌توان بنزین پیدا کرد. با یك بار پرکردن باك بنزین جیپ نمی‌توان به‌مقصد رسید. درضمن، در هر نقطهٔ مسیر می‌توان مقداری از بنزین داخل باك را بیرون کشید و، به‌عنوان ذخیره و برای استفادهٔ عبورهای بعدی، ذخیره کرد. اگر مثلاً با یك باك پر بنزین بتوان خود را به ۳۰۰ میلی مبداء حرکت رسانید، آن وقت، برای رسیدن به‌منزل گاهی که در ۴۰۰ میلی مبداء قرار دارد، باید باك جیپ را دوبار پر کرد، به این ترتیب: ابتدا با باك پر خود را به ۱۰۰ میلی مبداء می‌رسانیم، در آن جا به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ باك، از بنزین موجود ذخیره می‌کنیم و با باقی مانده بنزین داخل باك به مبداء بر می‌گردیم در مبداء باك را (که به‌کلی خالی شده است) دوباره پر می‌کنیم، وقتی که به ۱۰۰ میلی مبداء رسیدیم، بنزین ذخیره را در باك می‌ریزیم (که در نتیجه، باك دوباره پر می‌شود) و، از آن جا، ۳۰۰ میل جلوتر می‌رویم. به‌این‌ترتیب، با دوبار پر کردن باك جیپ، می‌توانیم خود را به ۴۰۰ میلی مبداء برسانیم.

مساله این است: برای‌رسیدن به‌مقصدی که فاصلهٔ آن تا مبداء معلوم است، حداقل مصرف بنزین چقدر است؟ می‌توان مساله را، به‌طریق‌دیگری طرح کرد که، به‌مفهومی عکس مسالهٔ اول است: بامقدار معینی بنزین، خود

را به‌چه مسافتی ازمبداء می‌توان رساند؟

واحد مقدار بنزین را، یك باك پر می گیریم. اگر فرض کنیم f واحد بنزین مصرف شده است، آن‌وقت، حداکثر مسافتی را که با این f واحد بنزین می‌توان طی کرد، $d(f)$ می‌نامیم. روشن است که، درحالت $f>۱$، داریم: $d(f)<f$، زیرا دست کم یکبار، برای سوخت گیری مجدد، باید به‌مبداء بر گردیم.

ثابت می کنیم که، اگر f عددی درست باشد، داریم:

$$d(f)=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\dots+\frac{۱}{۲f-۱} \qquad (۱)$$

مثلاً، برای $f=۲$ (یعنی با مصرف ۲ باك پر بنزین)، به‌دست می‌آید: $d(f)=\frac{۴}{۳}$. این‌جواب، نتیجه‌ای را که درابتدای بند آوردیم تاییدمی کند. اگر باهرباك پر، بتوان ۳۰۰ میل حرکت کرد، با دوبار پرکردن باك جیپ می‌توان خود را به $۳۰۰\times\frac{۴}{۳}$، یعنی ۴۰۰ میلی مبداء رسانید.

در حالتی که با عدد غیر درست F سروکار داشته باشیم، جواب چنین است:

$$d(F)=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\dots+\frac{۱}{۲f-۱}+\frac{F-f}{۲f+۱} \qquad (۲)$$

که درآن، f، عبارت است ازبخش درست عدد F (مثلاً، برای $F=۳/۷$، داریم: $f=۳$).

تنها شرطی که در اثبات این‌قضیه استفاده خواهیم‌کرد، این است که تعداد برگشت‌های جیپ (به‌طرف مبداء) محدود است. البته، بدون این‌شرط هم، می‌توان قضیه را ثابت کرد، منتهی با دشواری و پیچیدگی بیشتری. دیویدگال (David Gall) درسال ۱۹۷۰، برای اثبات این‌حالت کلی، از قضیهٔ انتگرال‌گیری باناخ (Banach) استفاده کرد، ولی چنین روشی

برای اثبات، خارج از موضوع این کتاب است. درحالتی که، تعدادبرگشت‌های جیپ، متناهی باشد، می‌توان حکم موردنظر را، بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال و براساس پیش‌قضیه‌ای که خواهیم آورد، ثابت کرد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که می‌توان مسافت $d(f)$ را، طبق رابطهٔ (۱)، بامصرف f واحد بنزین طی کرد. سپس، درمرحلهٔ دوم، ثابت می‌کنیم که این، حداکثر مسافتی است که می‌توان به‌دست آورد (و البته، این نتیجه‌گیری دوم، تا حد زیادی دشوارتر است). حالت عمومی‌تر را، یعنی وقتی که F عدد درستی نباشد، به‌عنوان یك مساله مطرح کرده‌ایم.

اثبات بخش اول را، باروش استقرای ریاضی به‌دست می‌آوریم. روشن است که به‌ازای $f=1$، جیپ می‌تواند یك واحد مسافت را طی کند، یعنی $d(1)=1$. به‌این‌ترتیب، دستور (۱)، به‌ازای $f=1$ درست است.

فرض می‌کنیم، با مصرف f واحد سوخت بتوان، طبق دستور (۱)، به‌مسافت $d(f)$ دست یافت؛ ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، می‌توان با مصرف $f+1$ واحد بنزین، به‌هدفی که درفاصلهٔ $d(f+1)$ از مبداء واقع است، رسید.

یك «مرکز ذخیرهٔ بنزین» درنقطهٔ P، که درفاصلهٔ $\frac{1}{2f+1}$ واحد از نقطهٔ مبداء S قرار دارد، ایجاد می‌کنیم (شکل a-۹.۱۰) جیپ، از S با پرکردن باك خود حرکت می‌کند و به‌طرف P می‌رود؛ درمسیر از S تا P به‌اندازهٔ $\frac{1}{2f+1}$ واحد بنزین مصرف می‌کند، همین‌اندازه بنزین را، برای برگشت از P به S درباك خود نگه می‌دارد وبقیهٔ بنزین، یعنی $\frac{2f-1}{2f+1}$ واحد را، درنقطهٔ P ذخیره می‌کند. اگرجیپ، این روند را f بار انجام‌دهد،

شکل a-۹.۱۰

روی‌هم به‌اندازهٔ

$$f\times\frac{۲f-۱}{۲f+۱} \qquad (۳)$$

واحد بنزین، درنقطهٔ P، ذخیره می‌شود. اکنون، اگر حرکت $(f+۱)$ ام خود را از S به P، با باك پر، آغاز کند، باذخیرهٔ $\frac{۲f}{۲f+۱}$ واحد بنزین در باك خود، به‌نقطهٔ P می‌رسد. این مقدار بنزین، همراه با ذخیرهٔ به‌اندازهٔ(۳) درنقطهٔ P، به‌این معناست که وقتی جیپ درمرتبهٔ $(f+۱)$ ام به نقطهٔ P برسد روی‌هم به‌اندازهٔ f واحد سوخت درنقطهٔ P دراختیار دارد، زیرا

$$\frac{۲f}{۲f+۱}+\frac{f(۲f-۱)}{۲f+۱}=f$$

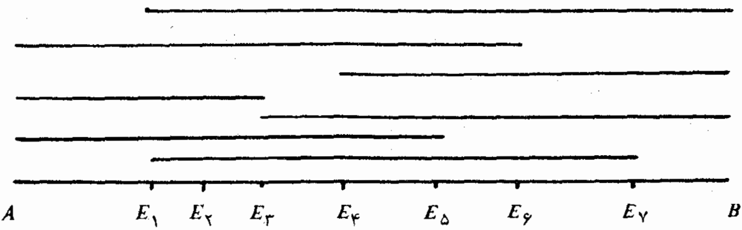
اکنون، باتوجه به‌فرض استقرا، بـا مصرف این f واحـد سوخت، می‌تواند به‌اندازه $d(f)$ واحـد مسافت را، طبق دستور (۱)، ازنقطهٔ P به‌بعد، طی کند؛ و چون $SP=\frac{۱}{۲f+۱}$، بنابراین، با در دست‌داشتن $(f+۱)$ واحد سوخت، می‌تواند مسافتی برابر

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\dots+\frac{۱}{۲f-۱}+\frac{۱}{۲f+۱}$$

واحد مسافت را بپیماید. اثبات استقرایی کامل شد.

برای بخش دوم، باید ثابت کنیم که، این مسافت، حداکثر مسافتی است که‌می‌توان با f واحد سوخت‌پیمود. پیش‌قضیهٔ تقریباً روشن زیر را،درنظر می‌گیریم:

پیش‌قضیه. بازه‌های بسته‌ای را، به تعداد متناهی روی پاره‌خط راست AB به‌طول r، درنظر می‌گیریم (این بازه‌ها، می‌توانند منطبق بریکدیگرهم باشند). اگـر هرنقطهٔ دلخواه AB، دست‌کم به s بـازه تعلق داشته باشد، آن‌وقت، مجموع طول‌هـای این بازه‌ها، حداقل برابر است با $r.s$.



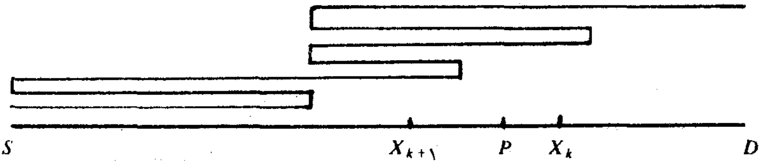
شکل ۹.۱۰-b

درشکل ۹.۱۰-b. این پیش‌قضیه، درحالت $s=۳$، به‌صورت ساده‌ای نشان‌داده‌شده‌است. دراین‌شکل، ۷ بازه داده‌شده‌است که، برای روشنی‌بیشتر، به‌جای این که روی پـاره‌خط AB مشخص شوند، دربـالای آن و به‌صورت پاره‌خط‌های موازی رسم شده‌اند. نقطه‌های انتهایی این بازه‌ها،عبارتنداز: A، $E_{۱}$، $E_{۲}$،...، $E_{۷}$ و B. هر یك از پـاره‌خطهـای $AE_{۱}$، $E_{۱}E_{۲}$،...، $E_{۶}E_{۷}$ و $E_{۷}B$، دست‌کم، به‌وسیلهٔ سه تا ازاین بازه‌هـا، پوشیده می‌شوند. بنابراین، طـول مجموع این بازه‌ها، دست‌کم، سه برابر طـول پاره‌خط AB است.

اکنون، و باتوجه به‌این پیش‌قضیه، درمـوقعیتی هستیم که می‌توانیم ثابت‌کنیم: حداکثر مسافتی را که می‌توان بامصرف f واحد بنزین (یعنی f بار پرکردن بـاك جیپ) پیمود، همان است که از دستور (۱) به‌دست می‌آید. درضمن، f را، عددی درست می‌گیریم. فرض می‌کنیم، جیپ بتواند باآغاز از نقطهٔ S، بـامصرف f واحد بنزین، خـود را بـه‌نقطهٔ D برساند. SD، مسیری مستقیم است و آن‌چه دربـالای این پاره‌خـط راست در روی شکل ۹.۱۰-c، بـه‌عنوان مسیر حرکت جیپ نشان داده‌ایم. به‌خاطـر درك بهتر مطلب است. پاره‌خـطهای افقی، مسیرهای رفت و بـرگشت جیپ را نشان می‌دهند و پاره‌خط‌های کوچك قائم، نقطه‌های دورزدن جیپ به طرف عقب یا جلو را مشخص می‌کنندکه، درعمل، وجود ندارند. ثابت می‌کنیم:

$$SD \leqslant ۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\dots+\frac{۱}{۲f-۱} \qquad (۴)$$

نقطهٔ X_k واقع بر پـاره‌خط CD را، برای هر عدد درست k برابر با



شکل ۹۰۱۵-c

۰، ۱، ۲، ...، f، طوری می‌گیریم که مصرف سوخت درطول تمامی مسیر جیپ در سمت راست X_k، برابر k واحد باشد. بنابراین، مصرف سوخت در مسیر کلی جیپ در سمت چپ X_k برابر $f-k$ واحد است. روشن است که، $X_\circ$ بر D و X_f بر S منطبق است ازآن‌جا که، جیپ برای سفر درسمت‌راست X_k، به k واحد سوخت نیاز دارد، باید این k واحد سوخت را به نقطهٔ X_k حمل‌کرده باشد. اگرنقطهٔ P را درسمت‌چپ X_k بگیریم، این k واحدسوخت ازنقطهٔ P عبورکرده است، یعنی جیپ، درحرکت به‌طرف راست، دست‌کم $k+۱$ بار از P گذشته است؛ همین‌طور، درحرکت به‌سمت چپ، جیپ دست‌کم k بار از P عبورکرده است. به‌این‌ترتیب، نقطهٔ P، روی‌هم، $۲k+۱$ بار درمعرض رفت وآمد جیپ بوده است.

پیش‌قضیه را درمورد پاره‌خط $X_{k+۱}X_k$ به‌کار می‌بریم. نقطه‌ای‌مانند P، واقع براین پاره‌خط (احتمالاً، به‌جز خود X_k) دست‌کم $۲k+۱$ بار در معرض رفت وآمد جیپ بوده است، درنتیجه، با توجه به‌پیش‌قضیه، مسافتی که به‌وسیلهٔ جیپ، بین $X_{k+۱}$ و X_k پیموده شده است، دست‌کم برابراست با $(X_{k+۱}X_k)\ (۲k+۱)$. چون، بنابه‌تعریف X_k و $X_{k+۱}$، جیپ درفاصلهٔ این دو نقطه، درست یك واحد مسیر را طی می‌کند، بنابراین

$$(۲k+۱)X_{k+۱}X_k\leqslant ۱ \Rightarrow X_{k+۱}X_k\leqslant\frac{۱}{۲k+۱} \qquad (۵)$$

فاصلهٔ SD را می‌توان به‌بخش‌های زیر تقسیم‌کرد:

$$SD=X_fX_{f-۱}+X_{f-۱}X_{f-۲}+\dots+X_۲X_۱+X_۱X_\circ \qquad (۶)$$

که با توجه به‌نابرابری (۵) و برابری (۶)، همان نابرابری (۴) به‌دست می‌آید.

J.۱۶۰ ثابت کنید، اگر F عدد درستی نباشد، با F واحد سوخت، می‌توان مسافتی را معادل دستور (۲) طی کرد.

J.۱۷۰ ثابت کنید، اگر تعداد برگشت‌های جیپ را محدود بگیریم، نمی‌توان مسافتی بیشتر ازمجموع (۲) را طی کرد؟

J.۱۸۰ اگر جیپ بتواند $\frac{۲}{۳}$ فاصلهٔ تا مقصد خود را بایك واحد سوخت (يك‌بار پرکردن باك) طی کند، با چند واحد سوخت، می‌تواند به‌مقصدبرسد؟

فصل یازدهم

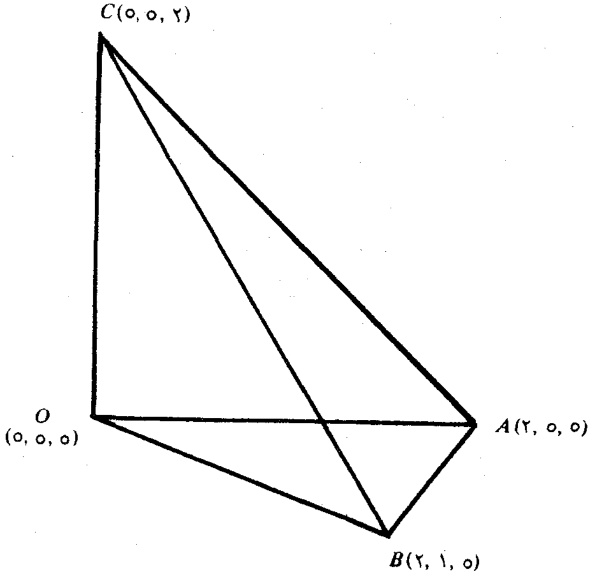
فضای سه بُعدی اقلیدسی

۱۰۱۱. قضیه‌های مقدماتی. بعضی از مساله‌های مربوط به فضای سه بعدی را در فصل سوم دیده‌ایم: مساله‌های C.۱۴ تا C.۲۴ و C.۲۶ در بند ۳.۴؛ و مساله‌های C.۳۰، C.۳۱ و C.۳۵ در پایان همان فصل. ولی، این مساله‌ها، نمی‌توانستند، بغرنجی‌های ناشی از عبور از هندسهٔ مسطحه به هندسهٔ فضایی را، به خوبی روشن کنند. برای بسیاری از روش‌های هندسهٔ مسطحه، نمی‌توان معادلی در هندسهٔ فضایی سه بعدی پیدا کرد و این، بر میزان دشواری‌ها می‌افزاید. مثلاً، می‌دانیم، ارتفاع‌های هر مثلث، از یک نقطه می‌گذرند، ولی شبیه این قضیه درمورد چهاروجهی‌ها، وجود ندارد، مگر درموردهای خاص. دراین جا، دراین باره بیشتر صحبت می‌کنیم.

چهاروجهی، تعمیم طبیعی مثلث دوبعدی، درفضای سه بعدی است: ۴ راس دارد که روی یک صفحه نیستند، ۶ یال دارد که از وصل دو به دوی راس‌ها به دست آمده‌اند، ۴ وجه مثلثی شکل دارد که نتیجه‌ای از وصل سه به سه از راس‌هاست.

چهاروجهی به راس‌های $O(0,0,0)$، $A(2,0,0)$، $B(2,1,0)$ و $C(0,0,2)$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰۱۱-a). عمود وارد از C بر وجه OAB، آن را در O قطع می‌کند. عمود وارد از راس B بر وجه OAC، آن را در A قطع می‌کند. خط‌های راست CO و AB یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ درواقع، این دو خط متنافرند، یعنی موازی یا متقاطع نیستند.

یکی از رابطه‌های مربوط به صفحه، که به سادگی به فضا تعمیم داده می‌شود، رابطهٔ مربوط به فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ است؛ این فاصله برابر است با



شکل ۱۱-۱۰-a

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

دراین‌فصل، تنها به‌چند مسالهٔ ساده از اکستره‌مم، درهندسهٔ فضایی، می‌پردازیم. دراین‌جا، تنها به‌اساسی‌ترین‌مساله پرداخته‌ایم، به‌جزمساله‌های مربوط به‌کوتاه‌ترین فاصلهٔ یک‌نقطه از یک‌خط، یک‌نقطه از یک‌صفحه و کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دوخط متنافر. گرچه، مساله‌های اخیر را هم، می‌توان باتعمیم روش‌های فصل‌های قبل حل کرد؛ این روش‌ها، در اغلب موردها، موجب می‌شوند تا ازبحث خالص هندسی پرهیز کنیم. مثلاً، برای‌پیدا کردن کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ (۱،۲،۳) ازصفحهٔ $x-2y-2z=5$، بایدکمترین مقدار عبارت

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

با شرط $x-2y-2z=5$ به‌دست آورد، که اگر به‌جای x، مقدارش

$۲y+۲z+۵$ را قرار دهیم، مساله، منجر به‌پیدا کردن می‌نیمم عبارت

$$(۲y+۲z+۴)^۲+(y-۲)^۲+(z-۳)^۲$$

می‌شود؛ ادامهٔ حل را می‌توان باتوجه به‌مسالهٔ B.۴۵، درپایان فصل دوم، انجام داد. ولی ما این راه را دنبال نمی‌کنیم، چرا که درمقایسه باروش‌های هندسی، تاحدی مصنوعی و دور ازظرافت است.

مسالهٔ کوتاه‌ترین فاصلهٔ یک‌نقطه ازیک خطراست، ساده‌تر است. مثلاً، برای پیدا کردن‌کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ (۱،۲،۳) از خطراست

$$x=۲+t،\quad y=۱+t،\quad z=۲-t$$

بایدکمترین مقدار ممکن عبارت زیر را، با انتخاب مناسب t، پیدا کرد:

$$(۲+t-۱)^۲+(۱+t-۲)^۲+(۲-t-۳)^۲=۳t^۲+۲t+۳$$

که با استفاده از همان روش فصل دوم، $t=-\frac{۱}{۳}$ به‌دست می‌آید و، به‌ازای این مقدار t، کوتاه‌ترین فاصلهٔ مطلوب، برابر $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ می‌شود.

شبیه هندسهٔ مسطحه، در هندسهٔ فضائی هم، گاهی بهتر است از روش مختصاتی استفاده کنیم، درحالی که دربرخی موردهای دیگر، بهتر است ازاین روش، صرف‌نظر کنیم.

K.۱۰ بعدهای مخروط به‌حجم‌ماکزیمم‌را پیدا کنیدکه درکره‌ای به‌شعاع واحدمحاط باشد. همین مساله را، برای چهاروجهی، استوانهٔ قائم ومکعب مستطیل محاط درکرهٔ به‌شعاع واحد، حل کنید.

K.۲۰ حداکثرچندنقطه، I. درصفحه و II. درفضای‌سه‌بعدی، می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که فاصله‌های دوبه‌دوی این نقطه‌ها، برابر باشند؟

۲.۱۱. قضیهٔ هم‌پیرامونی، برای چهاروجهی. از بین‌چهاروجهی‌های با سطح کل مفروض، چهاروجهی منتظم، دارای حداکثر حجم است. این حکم را، به‌صورت قضیهٔ زیر هم، که هم‌ارز آن‌است، می‌توان بیان‌کرد:

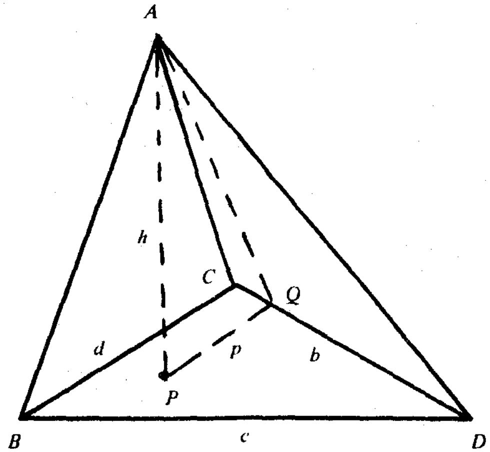
قضیهٔ ۲.۱۱ــa. از بین همهٔ چهاروجهی‌های باحجم مفروض، چهاروجهی منتظم، دارای حداقل سطح کل است.

اثبات این قضیه، در دو بخش، و به‌سادگی، انجام می‌شود. چهاروجهی T را غیرمنتظم می‌گیریم و به‌جست‌وجوی چهاروجهی T_1 با همان حجم چهاروجهی T می‌رویم که سطح کلی کمتر داشته باشد. اگر T_1 منتظم از آب درآید، اثبات قضیه درهمین‌مرحله تمام شده است. ولی، اگر T_1 نامنتظم باشد، به‌مرحلهٔ دوم می‌رویم و ثابت می‌کنیم که، هر چهاروجهی منتظم که حجمی برابر T_1 داشته باشد، دارای سطح کلی بازهم کمتر است توجه کنیم، این اثبات، به‌معنای اثبات وجود چهاروجهی با حداقل مساحت کل نیست.

درچهاروجهی T، به‌دلیل نامنتظم بودن، دست کم، یکی از وجه‌های مثلثی، متساوی‌الاضلاع نیست (درواقع، می‌توان ثابت کرد که، اگر سه‌وجه از چهاروجه چهار وجهی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باشند، آن‌وقت، چهاروجهی حتماً منتظم است). مثلاً، وجه BCD از چهاروجهی T را، با ضلع‌های به‌طول b و c و d می‌گیریم، به‌شرطی که، هر سه‌ضلع آن، باهم برابر نباشند. مساحت این مثلث را Δ می‌نامیم.

AP را ارتفاع وارد از راس A بر قاعدهٔ BCD می‌گیریم (در شکل ۲.۱۱ــa، نقطهٔ P، در داخل مثلث BCD قرار دارد، ولی در حالت کلی، این نقطه می‌تواند درهرجای صفحهٔ مثلث BCD باشد). اگر طول عمود AP برابر با h باشد، حجم چهاروجهی T، برابر $\frac{1}{3}h.\Delta$ می‌شود.

ازنقطهٔ P، سه‌عمود، به‌طول‌های p، q و r را، به‌ترتیب، بر ضلع‌های CD، DB و BC (و یا، درصوت لزوم، برامتداد آن‌ها) از مثلث BCD رسم می‌کنیم (درشکل ۲.۱۱ــa، برای این که شکل شلوغ نشود، تنهاعمود PQ به‌طول p، برضلع CD رسم شده است). چون زاویهٔ APQ برابر ۹۰ درجه است، بنابراین طول AQ برابر $\sqrt{h^2+p^2}$ می‌شود. با توجه به‌قضیهٔ سه عمود درهندسهٔ فضائی مقدماتی، روشن می‌شودکه AQ بر CD عمود



شکل ۲۰۱۱-a

است. به‌این‌ترتیب، مساحت مثلث ACD برابر است با $\frac{۱}{۲}b\sqrt{h^۲+p^۲}$.
به‌همین‌ترتیب، برای مساحت مثلث‌های ABD و ABC هم، عبارت‌های مشابهی به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر سطح کل چهاروجهی T را S بگیریم، داریم:

$$S-\Delta=\frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲h^۲+b^۲p^۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{c^۲h^۲+c^۲q^۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{d^۲h^۲+d^۲r^۲} \quad (۱)$$

برای این برابری، نابرابری مسالهٔ C.۳۶ درفصل سوم را به کار می‌بریم:

$$S-\Delta\geqslant\frac{۱}{۲}\sqrt{(bh+ch+dh)^۲+(bp+cq+dr)^۲} \quad (۲)$$

مساحت مثلث PCD برابر است با $\frac{۱}{۲}bp$ و، به‌همین‌ترتیب، برای مساحت مثلث‌های PBD و PBC، به‌ترتیب، $\frac{۱}{۲}cq$ و $\frac{۱}{۲}dr$ به‌دست‌می‌آید.
چون مساحت مثلث BCD، برابر Δ است، بنابراین

$$\frac{1}{2}(bp+cq+dr)\geqslant\Delta \qquad (3)$$

علامت برابری، وقتی برقرار است که، نقطهٔ P، در داخل یا روی محیط مثلث BCD باشد. ازاین نابرابری و نابرابری (۲)، نتیجه می‌شود:

$$S-\Delta\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{h^2(b+c+d)^2+4\Delta^2} \qquad (4)$$

اکنون چهاروجهی T_1، باهمان حجم V، برابر حجم T، وقاعده‌ای به‌مساحت Δ و مساحت جانبی S_1 را پیدا می‌کنیم، به‌نحوی که داشته‌باشیم: $S_1<S$. چهاروجهی T_1، با راس‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 را، به‌این‌ترتیب، می‌سازیم: قاعدهٔ $B_1C_1D_1$ را، مثلثی‌متساوی‌الاضلاع به‌ضلع برابر k، طوری می‌گیریم که مساحت آن برابر Δ شود. ارتفاع چهار وجهی T_1 را، برابر h، همان ارتفاع چهاروجهی T، می‌گیریم که، دراین‌صورت، حجم‌های T و T_1 باهم برابرمی‌شوند. سرانجام، هرم T_1 را قائم می‌گیریم، یعنی‌به‌نحوی که، ارتفاع وارد از راس A_1 برقاعدهٔ $B_1C_1D_1$، درنقطهٔ P_1، مرکزهندسی قاعده، فرودآید. بنابراین، عمودهای وارد از P_1 برضلع‌های مثلث $B_1C_1D_1$، طول‌های برابر پیدا می‌کنند و ما، طول مشترك آن‌ها را، p_1 می‌نامیم؛ ازآن‌جا

$$\Delta=\frac{3}{2}kp_1=\frac{\sqrt{3}}{4}k^2 \qquad (5)$$

رابطهٔ شبیه رابطهٔ (۱)، برای سطح کل S_1 از چهاروجهی T_1، چنین است:

$$S_1-\Delta=\frac{3}{2}\sqrt{k^2h^2+k^2p_1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{h^2(3k)^2+4\Delta^2} \qquad (6)$$

قاعدهٔ T_1، مثلث متساوی‌الاضلاعی است به‌مساحت Δ؛ قاعدهٔ T مثلثی است باضلع‌های b، c و d وهمان مساحت. با توجه به‌قضیهٔ هم‌پیرامونی

برای مثلث‌ها، باید محیط قاعدهٔ متساوی‌الاضلاع، کوچکتر باشد، یعنی $3k<b+c+d$ و، بنابراین، از مقایسهٔ (۶) و (۴)، به‌دست می‌آید: $S_1<S$. به‌این‌ترتیب، چهاروجهی T_1، که حجمی برابر حجم چهاروجهی T دارد، دارای سطح کلی کمتر است. اگر T_1، به‌تصادف، منتظم باشد، به‌نتیجه‌مطلوب رسیده‌ایم؛ ولی ما بنا را براین می‌گیریم که T_1 منتظم نباشد و به‌مرحلهٔ دوم اثبات می‌پردازیم.

درمرحلهٔ‌دوم، بافرض نامنتظم بودن T_1، ثابت‌می‌کنیم که، چهاروجهی منتظم باحجم برابر حجم T_1، دارای مساحت کل کمتری است. چهار وجهی منتظمی با یال به‌طول r را، طوری درنظر می‌گیریم که حجمی برابر باحجم T_1 داشته باشد. اگر هرحجم را به عنوان حاصل‌ضرب ثلث مساحت قاعده درارتفاع درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}r^3=\frac{\sqrt{3}}{12}k^2h \Rightarrow 2r^6=3k^4h^2 \qquad (7)$$

$k\neq r$ می‌گیریم، زیرا اگر داشته باشیم $k=r$، از (۷) به دست می‌آید: $3h^2=2r^2$، یعنی h برابر با ارتفاع چهاروجهی منتظم به‌یال r است. به‌این‌ترتیب، چهاروجهی T_1 منتظم می‌شود که برخلاف فرض ما، در این‌حالت است.

مساحت سطح کل چهار وجهی منتظم با یال r، برابر است با $\sqrt{3}r^2$، که ثابت می‌کنیم از S_1 کمتر است. باتوجه به (۶) و (۵)، در واقع، باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{3}r^2<\frac{\sqrt{3}}{4}k^2+\frac{1}{2}\sqrt{9h^2k^2+\frac{3}{4}k^4}$$

که اگر دوطرف را در $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ضرب کنیم و جملهٔ گویا را به‌سمت چپ ببریم:

$$4r^2-k^2<\sqrt{12h^2k^2+k^4}$$

اگر داشته باشیم: $4r^2-k^2<0$، نتیجه روشن است. در حالت

$4r^2 - k^2 < 0$، بامجذور کردن دوطرف نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$16r^4 - 8r^2k^2 + k^4 < 12r^2k^2 + k^4 \qquad (8)$$

از (۷) داریم: $12h^2k^2 = \frac{8r^6}{k^2}$؛ بنابراین، رابطهٔ (۸) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$2r^4 < r^2k^2 + \frac{r^6}{k^2} \qquad (9)$$

این نابرابری، باتوجه به‌نابرابری روشن $2xy < x^2 + y^2$، به‌صورت اکید خود برقرار است ($x = rk$ و $y = \frac{r^3}{k}$). حالت $x = y$ پیش نمی‌آید، زیرا از $rk = \frac{r^3}{k}$ به‌دست می‌آید $r = k$، درحالی که $r \neq k$ فرض کرده‌ایم.

K۰۳۰. I. با یك‌مثال نشان دهید که: همیشه، مجموع هرچهار یال از یك چهاروجهی، بیشتر ازمجموع دو یال دیگر آن نیست. II. باوجوداین، ثابت کنید: مجموع هر دو یال روبه‌رو دریك چهاروجهی، ازمجموع چهار یال دیگر آن کوچکتر است، مثلاً، درچهاروجهی $ABCD$ داریم:

$$AB + CD < AC + AD + BC + BD$$

III. قضیهٔ مشابهی را دربارهٔ مجذورهای طول یال‌ها، ثابت کنید.

K۰۴۰. ثابت کنید، در هر چهاروجهی، مجموع مساحت‌های هرسه‌وجه، از مساحت وجه چهارم بیشتر است.

K۰۵۰. ثابت کنید، مجموع‌فاصله‌های نقطهٔ P، واقع در داخل چهاروجهی منتظم، از چهاروجه آن، به‌جای نقطهٔ P بستگی ندارد.

۰۳۰۱۱. کره‌های محاطی ومحیطی یك چهاروجهی. هر چهاروجهی، یك کرهٔ محیطی دارد که از چهار راس آن می‌گذرد. همچنین، کره‌ای وجود دارد که بر چهاروجه چهاروجهی مماس است (هر وجه، به عنوان

صفحه‌ای است مماس بر کره) که آن را، کرهٔ محاطی چهاروجهی گویند.

قضیهٔ ۳.۱۱-a. اگر R و r، به‌ترتیب، شعاع‌های دو کرهٔ محیطی و محاطی یك چهاروجهی باشند، آن‌گاه $R \geqslant ۳r$. علامت برابری، تنها در چهاروجهی منتظم برقرار است.

این قضیه، در واقع تعمیم رابطهٔ اولر در مثلث است: اگر R و r، به‌ترتیب، شعاع‌های دو دایرهٔ محیطی و محاطی یك مثلث باشند، آن‌گاه $R \geqslant ۲r$. رابطهٔ اولر را درقضیهٔ ۴.۹-a ثابت کردیم و اکنون، به‌تعمیم آن در فضای سه‌بعدی می‌پردازیم.

برای هر چهار وجهی مفروض $ABCD$، می‌توان دستگاه مختصاتی درنظر گرفت که، در آن، مختصات راس‌های A، B، C و D چنین باشند:

$$(۰,۰,۰),\quad (۳a,۰,۰),\quad (۳b,۳c,۰),\quad (۳d,۳e,۳f) \qquad (۱)$$

که‌درآن‌ها، عددهای a، b، c، d، e و f، عددهای حقیقی مناسبی هستند. ضریب عددی ۳ را، به این مناسبت گذاشته‌ایم که کار محاسبه را ساده‌تر کند و، روشن است که هیچ لطمه‌ای به کلی بودن مطلب نمی‌زند. مرکز هندسی مثلث‌های ABC، ABD، ACD و BCD را، به‌ترتیب، $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ می‌نامیم. مختصات این مرکزهای هندسی، چنین‌اند:

$$(a+b,c,۰),(a+d,e,f),(b+d,c+e,f),(a+b+d,c+e,f)$$

که به‌سادگی از راه محاسبهٔ واسطهٔ حسابی مختصات سه‌راس هر مثلث به‌دست می‌آیند. دوپاره‌خط راست AB و $A_۱B_۱$ موازی‌اند و، به‌ترتیب، طول‌هایی برابر $۳a$ و a دارند. به‌همین‌ترتیب، پاره‌خطهای راست BC، BD و CD، به‌ترتیب، با پاره‌خطهای راست $B_۱C_۱$، $B_۱D_۱$ و $C_۱D_۱$ موازی‌اند و، در هر مورد، طول‌ها به‌نسبت ۳ به ۱ است. بنابراین، دو چهاروجهی $ABCD$ و $A_۱B_۱C_۱D_۱$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها، برابر است با ۳:۱. درنتیجه، کره‌های محیطی این دوچهاروجهی، شعاع‌هایی به‌نسبت ۳:۱ دارند، یعنی شعاع کرهٔ محیطی چهاروجهی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ برابر $\frac{R}{۳}$ می‌شود. ولی، کرهٔ

محاطی چهار وجهی $ABCD$، باشعاع r، کوچکترین کره‌ای است که با هر چهاروجه چهاروجهی، نقطهٔ مشترك دارد، بنابراین: $\frac{R}{3}\geqslant r$، یا $R\geqslant 3r$ علامت برابری، تنها برای‌وقتی است که، کرهٔ محاطی چهاروجهی $ABCD$، برکرهٔ محیطی چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ منطبق باشد و، روشن‌است‌که، این وضع، تنها درمورد چهاروجهی منتظم پیش می‌آید.

اکنون ثابت‌می‌کنیم که، برعکس، اگر کرهٔ محاطی چهاروجهی $ABCD$ برکرهٔ محیطی چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ منطبق باشد، آن‌وقت، چهاروجهی $ABCD$، منتظم است. ببینیم، این وضع، درصفحهٔ مثلث $A_1B_1C_1$، یعنی صفحهٔ $z=f$، به‌چه معناست! دراین‌جا، درواقع، دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ بر دایرهٔ‌محاطی مثلث T، که ازبرخورد صفحهٔ $z=f$ باچهاروجهی $ABCD$ به‌دست می‌آید، منطبق می‌شود. مختصات راس‌های مثلث T، چنین‌اند:

$$(d, e, f),\quad (2a+d, e, f),\quad (2b+d,\ 2c+e, f) \qquad (2)$$

به‌سادگی دیده‌می‌شودکه، نقطه‌های وسط ضلع‌های این‌مثلث، همان‌نقطه‌های A_1، B_1 و C_1اند. درنتیجه، بنابه‌قضیهٔ ۹.۴ـa، مثلث T، متساوی‌الاضلاع است. اگر d، e و f را، به‌ترتیب، از مختصات راس‌های مثلث T، در رابطهٔ (۲)، کم‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(0, 0, 0),\quad (2a, 0, 0),\quad (2b, 2c, 0) \qquad (3)$$

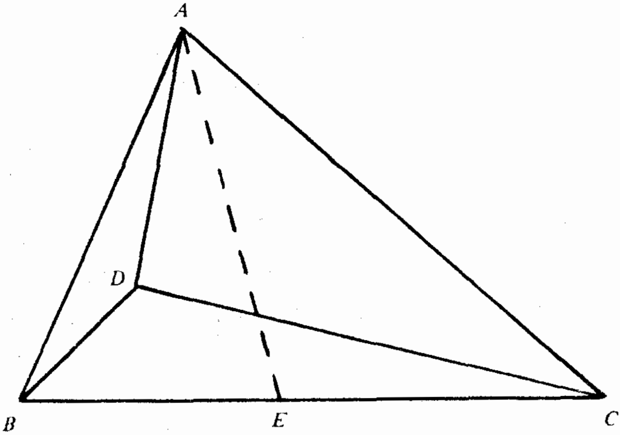
که‌در واقع، راس‌های یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. به‌این‌ترتیب، مختصات راس‌های مثلث ABC ـ که در (۱) داده شده‌اند ـ درست سه‌برابر مختصات راس‌های مثلث (۳) درمی‌آیدکه، درنتیجه، به‌معنای متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC است. به‌همین‌ترتیب، می‌توان ثابت‌کردکه سایر وجه‌های چهاروجهی $ABCD$ هم، مثلث‌هایی‌متساوی‌الاضلاع‌اند، بنابراین، چهاروجهی $ABCD$، یك چهاروجهی منتظم است.

۴.۱۱. کوتاه‌ترین مسیرها، روی کره. از بین همهٔ دایره‌هایی که روی کره می‌توان رسم کرد، دایرهٔ عظیمه، شعاعی برابر شعاع کره دارد. اگر زمین را، کرهٔ همواری درنظربگیریم، طول‌های جغرافیائی، که از قطب شمال به قطب جنوب امتداد دارند، دایره‌های عظیمه‌اند. تنها یك خط، به‌عنوان مبداء عرض جغرافیائی وجود دارد، یعنی خط استوا، که آن‌هم، یك دایرهٔ عظیمه است. اگر روی کره، دو نقطه طوری درنظر بگیریم که دوسر یك‌قطر کره باشند، آن وقت، ازاین دونقطه، بی‌نهایت دایرهٔ عظیمه می‌گذرد؛ ولی اگر دونقطهٔ P و Q در روی کره، دو سر یك‌قطر کره نباشند، تنها یك دایرهٔ عظیمه از P و Q می‌گذرد. دراین‌حالت، کمان کوچکتر PQ، روی دایرهٔ عظیمه‌ای که از P و Q می‌گذرد، کوتاه‌ترین فاصلهٔ از P تا Q را روی سطح کره‌مشخص‌می‌کند. هدف‌اصلی این بند، اثبات‌همین‌مطلب است. درعین‌حال، ثابت می‌کنیم، کوتاه‌ترین فاصله، بین دو نقطه‌ای که دو انتهای قطری از کره باشند، برابربانصف دایرهٔ عظیمه است. ابتدا به‌قضیه‌ای مقدماتی‌می‌پردازیم که، به‌خودی خود هم، یك قضیهٔ جالب است.

قضیهٔ ۴.۱۱–a. در هر راس یك چهاروجهی، مجموع هر دو زاویه، از زاویهٔ سوم بزرگتر است. درواقع، اگر BAC را، بزرگترین زاویه در راس A از چهاروجهی $ABCD$ بگیریم، باید ثابت‌کنیم:

$$\widehat{BAD}+\widehat{CAD}>\widehat{BAC} \qquad (1)$$

بدون‌آن‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $\widehat{BAD}=\widehat{ABC}$. درحالتی‌که، این دو زاویه، برابر نباشند، می‌توان با جابه‌جا کردن نقطهٔ C روی نیم‌خط راست AC، به‌این برابری رسید: C را روی نیم‌خط AC به‌A نزدیك و یا، درصورت لزوم، از A دور می‌کنیم. درواقع، وقتی‌که C به A نزدیکتر شود، زاویهٔ BAC کوچکتر و وقتی‌که C از A دورتر شود، زاویهٔ BAC بزرگتر می‌شود (شکل ۴.۱۱–a). درضمن، روشن است‌که، باجابه‌جا کردن‌نقطهٔ C روی‌نیم‌خط AC، درمقدار زاویه‌های نابرابری(۱)، تغییری‌حاصل‌نمی‌شود. باتوجه به‌برابری دو زاویهٔ ABD و



شکل ۴.۱۱-a

ABC، نقطه‌ای مانند E را بر BC انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که دو زاویهٔ BAD و BAE برابر باشند (شکل ۴.۱۱-a را ببینید).

ازهم نهشتی دو مثلث ABD و ABE نتیجه می‌شود: $BD=BE$ و $AD=AE$. ازنابرابری روشن $BD+DC>BC$ و برابری $BD=BE$ نتیجه می‌شود: $DC>EC$. در دومثلث ADC و AEC، ضلع AC مشترک و دوضلع AD و AE برابرند. بنابراین، با توجه به‌قانون کسینوس‌ها، به‌این نتیجه می‌رسیم که، زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع CD ازمثلث ADC، بزرگتر از زاویهٔ روبه‌رو به EC درمثلث AEC است. بنابراین $\widehat{DAC}>\widehat{EAC}$، که نابرابری (۱) را ثابت می‌کند.

اکنون، با استفاده ازاین‌قضیه، قضیهٔ اصلی این بند را ثابت می‌کنیم یعنی ثابت می‌کنیم که، کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه از سطح کره، درامتداد کمانی از دایرهٔ عظیمه است.

قضیهٔ ۴.۱۱-b. P و Q را دونقطه ازسطح کره درنظرمی گیریم. کمان $\mathrm{Arc}PQ$ (به‌حرف بزرگ A در Arc توجه کنید)را، به‌معنای کمان کوچکتر دایرهٔ عظیمه‌ای می گیریم که از دونقطهٔ P و Q گذشته است (درحالتی که

P و Q، دو انتهای قطری از کره باشند، $\mathrm{Arc}PQ$ را به معنای نصف دایرهٔ عظیمه می‌گیریم). اگر $\mathrm{arc}PQ$ (با حرف کوچك a) را به‌معنای طول کمان دلخواهی بگیریم که از P و Q گذشته است، و بر دایرهٔ عظیمه منطبق نیست، ثابت کنید: $\mathrm{Arc}PQ < \mathrm{arc}PQ$.

شعاع کره را، واحد می‌گیریم. K را نقطهٔ ثابتی از کمان $\mathrm{arc}PQ$ فرض می‌کنیم که بردایرهٔ عظیمه $\mathrm{Arc}PQ$ واقع نباشد (شکل ۴.۱۱-b). [دراین جا، «$\mathrm{arc}PQ$» را به‌معنای طول کمان و هم به‌معنای خود کمان به کار برده‌ایم؛ مضمون مطلب، نوع کاربرد را نشان می‌دهد. به‌همین ترتیب، درمورد «$\mathrm{Arc}PQ$».]

ابتدا، ثابت می‌کنیم:

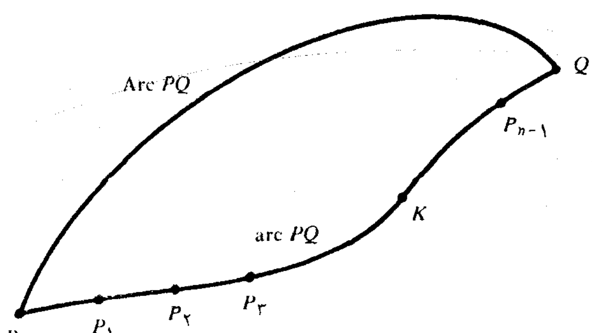
$$\mathrm{Arc}PK + \mathrm{arc}KQ > \mathrm{Arc}PQ \qquad (۲)$$

اگر مرکز کره را O بنامیم، درچهاروجهی $OPKQ$، با توجه به‌قضیهٔ ۴.۱۱-a، داریم:

$$\widehat{POK} + \widehat{KOQ} > \widehat{POQ}$$

چون طول کمان $\mathrm{Arc}XY$ از دایرهٔ عظیمه، متناسب با زاویهٔ مرکزی XOY است، بنابراین نابرابری (۲) برقرار است. عدد مثبت β را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta(\mathrm{Arc}PK + \mathrm{arc}KQ) = \mathrm{Arc}PQ \qquad (۳)$$



شکل ۴.۱۱—b

بنابراین $1 > \beta$. زاویهٔ مثبت θ را، تاحد امکان کوچک، طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $cos\theta > \beta$. این امکان‌پذیر است، زیرا با میل θ به‌سمت صفر، $cos\theta$ به‌سمت ۱ میل می‌کند.

اکنون، اگر A و B را دو نقطهٔ دلخواه ازسطح کره بگیریم، به‌نحوی که به‌اندازهٔ کافی به‌هم نزدیک باشند و کمان عظیمهٔ $\mathrm{Arc}AB$، روبه‌رو به‌زاویه‌ای کوچکتر یا برابر θ ازمرکزکره باشد، آن‌وقت ثابت می‌کنیم که

$$AB > \beta(\mathrm{Arc}AB) \qquad (4)$$

که درآن، منظور از AB، فاصلهٔ دونقطهٔ A و B روی خط راستی است که از A و B در داخل کره‌می‌گذرد. باتوجه به‌قضیهٔ a-۵.۶ داریم: $tg\theta > \theta$، و بنابراین: $\frac{sin\theta}{\theta} > cos\theta$. اگر $\mathrm{Arc}AB$ ازمرکز کره به‌زاویهٔ 2λ دیده‌شود که $2\lambda \leqslant \theta$، آن‌وقت $AB = 2sin\lambda$، $\mathrm{Arc}AB = 2\lambda$ و

$$\frac{AB}{\mathrm{Arc}AB} = \frac{sin\lambda}{\lambda} > cos\theta > cos\theta > \beta$$

و به‌این‌ترتیب، نابرابری (۴) ثابت می‌شود.

اکنون، نقطه‌های P_1، P_2، ...، P_{n-1} را روی کمان PQ بـه‌نحوی انتخاب می‌کنیم که نقطهٔ K یکی‌ازآن‌ها باشد و هرکدام از پاره‌خطهای‌راست

$$PP_1,\ P_1P_2, \ldots,\ P_{n-1}Q \qquad (5)$$

به‌زاویه‌ای کوچکتر یا برابر θ، از مرکز دیده شوند. برای این منظور، می‌توانیم n را به‌اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم. اگر مجموع فاصله‌های (۵) را S_1 بنامیم، باتوجه به (۴) خواهیم داشت:

$$S_1 > \beta(\mathrm{Arc}PP_1 + \mathrm{Arc}P_1P_2 + \ldots + \mathrm{Arc}P_{n-1}Q)$$

با استفاده مکرراز (۲)، معلوم می‌شود که مجموع داخل پرانتز، درنابرابری اخیر، بزرگتر ازمجموع $\mathrm{Arc}PK + \mathrm{Arc}KQ$ و یا برابر آن است (به‌یاد داریم که K، بر یکی‌ازنقطه‌های P_1، P_2، ...، P_{n-1} منطبق است). باتوجه

به‌این نابرابری و (۳) به‌دست می‌آید:

$$S_1 > \beta(\mathrm{Arc}PK + \mathrm{Arc}KQ) = \mathrm{Arc}PQ \qquad (۶)$$

سرانجام‌مشاهده می‌کنیم که $\mathrm{arc}PQ$، به‌وسیلهٔ نقطه‌های P_1، P_2، ...، P_{n-1}، به n بخش تقسیم شده است، به‌نحوی که

$$\mathrm{arc}PQ = \mathrm{arc}PP_1 + \mathrm{arc}P_1P_2 + \dots +$$

$$+\mathrm{arc}P_{n-1}Q > PP_1 + P_1P_2 + \dots + P_{n-1}Q = S_1 \qquad (۷)$$

و از (۶) و (۷) نتیجه می‌شود: $\mathrm{arc}PQ > \mathrm{Arc}PQ$.

۶۰K. آیا شبیه نابرابری قضیهٔ a-۴.۱۱، برای زاویه‌های دووجهی که، یال‌های آن‌ها، در یك راس چهاروجهی بـه‌هم رسیده‌اند، وجود دارد؟ مثلاً، آیا برای زاویه‌هـای دووجهی بین هر دووجه از وجه‌هـای ABC، ABD و ACD در چهاروجهی $ABCD$، مجموع هـر دو زاویه، از زاویهٔ سوم بزرگتراست؟ [زاویهٔ دووجهی، به‌زاویه‌ای مثل PQR گویند، به‌نحوی که Q نقطه‌ای از فصل مشترك دووجـه، P بریکی ازصفحه‌ها، R برصفحهٔ دیگر و خط‌های راست PQ و RQ برفصل مشترك عمود باشند.]

مساله‌های گوناگون

۷۰K. بزرگترین بستهٔ مکعب مستطیل‌شکلی کـه، بنابرقانون امریکا، می‌توان پست کرد، بسته‌ای است که مجموع «طـول» و «محیط» آن از ۸۴ اینچ تجاوز نکند. منظور از «محیط»، اندازهٔ دور بسته در دو بعدکوچکتر آن است (اگـر بسته را با بعدهـای x، y و z، بـاشرط $x \leqslant y \leqslant z$، درنـظر بگیریـم، آن‌وقت، z «طـول» آن و $۲x + ۲y$ «محیط» آن خـواهد بود). بعدهای بسته‌ای را پیدا کنیدکـه بیشترین حجم را داشته باشد و، در ضمن، با قانون‌های امریکا سازگار باشد.

۸۰K. اطاق مکعب مستطیل شکلی به‌طول ۲۰ فوت، عرض ۱۰ فوت و ارتفاع ۱۰ فوت مفروض است. عنکبوتی روی یکی از دیوارهای جانبی (با بعدهـای ۱۰ × ۱۰) در نقطه‌ای قرار داردکه به‌یك فاصله از دو دیوار

جانبی مجاور و یك فوت پایین‌تر از سقف است عنکبوت می‌خواهد به‌سراغ مگسی برود که در دیوار مقابل و درنقطه‌ای که از دو دیوار جانبی خود به‌یك فاصله و یك فوت بالاتر ازکف اطاق است پرود. روشن است که، عنکبوت، می‌تواند به‌طرف سقف برود و باعبور ازخطمیانی سقف خود را به‌دیوار روبه‌رو برساند و، سپس، به‌طرف‌پائین بیاید و، روی‌هم، باپیمودن ۳۰فوت راه، خود را به‌مگس برساند. (I) آیا این‌کوتاه‌ترین مسیری است که عنکبوت می‌تواند ازطریق دیوارها، سقف وکف اطاق، خود را به مگس برساند؟ مساله را، درحالتی هم‌که طول اطاق، (II) برابر ۱۵ فوت یا (III) برابر ۲۵ فوت باشد، حل‌کنید.

K.۹. کوتاه‌ترین فاصلهٔ دو نقطهٔ $(۴،۰،۰)$ و $(۲\sqrt{۲}،۲\sqrt{۲}،۷)$ را روی سطح استوانه $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ پیدا کنید. [چون در معادله، z وجود ندارد، می‌تواند نقطه‌هایی با مختصات $(x،y،z)$ درشرط $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ صدق کنند که، درآن‌ها، z مقداری دلخواه باشد.]

K.۱۰. کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $(۲،۰،\sqrt{۵})$ و $(-۲،۰،\sqrt{۵})$ را روی مخروط $۴z^{۲}=۵x^{۲}+۵y^{۲}$ پیدا کنید.

K.۱۱. تعمیم قضیهٔهرون، درفضای سه‌بعدی. خط‌راست CD ودونقطهٔ A و B مفروض‌اند. A و B روی خط‌راست CD نیستند و، در ضمن، A، B و CD بریك صفحه قرار نگرفته‌اند. نقطهٔ P را روی خط CD طوری پیدا کنیدکه مجموع $AP+PB$، حداقل‌مقدارممکن باشد. این‌مساله رامی‌توان در دستگاه محورهای‌مختصات شرح‌داد: CD را محورxها و امتداد عمودی را که از A بر CD رسم می‌شود، به عنوان محور yها می‌گیریم (پای این عمود بر CD، مبداء مختصات است). اگر مختصات A را $(۰،a،۰)$ فرض کنیم، با انتخاب جهت مناسب برای محور yها، می‌توان $a>۰$ درنظر گرفت. نقطه‌B به‌مختصات $(b،c،d)$ خواهد بودکه، درآن، $c^{۲}+d^{۲}>۰$، زیرا نقطهٔ B برمحور xها (یعنی خط‌راست CD) قرار ندارد. P را با مختصات $(x،۰،۰)$ فرض می‌کنیم. مساله به‌این‌جا منجر می‌شودکه مقدار x را برحسب a، b، c و d طوری پیدا کنیم‌که مجموع $AP+PB$می‌نیمم

باشد. [از بند ۵.۳ استفاده کنید.]

K.۱۲۰ برای بریدن یک مکعب چوبی و تبدیل آن به ۲۷ مکعب کوچکتر و برابرهم، حداقل چند برش لازم است. فرض کنید، بعداز اولین برش، بتوان قطعه‌ها را طوری روی هم قرار داد که برش، از بین دو یا چند تکه چوب عبور کند.

K.۱۳۰ قطعه‌ای برای پر کردن شکاف چوب (گوه) دراختیار داریم که از یک استوانهٔ قائم به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲=r^۲$ با دوصفحهٔ قاعده به‌معادله‌های $z=۰$ و $z=h$، و دونیم‌صفحه که یکدیگر را روی محورzها قطع کرده‌اند، تشکیل شده است. اگر زاویهٔ بین دونیم‌صفحه را θ بگیریم، حجم گوه برابر $\frac{\theta r^۲ h}{۲}$ و مساحت سطح آن برابر $۲rh+\theta rh+\theta r^۲$ خواهد شد. r را ثابت بگیرید و برای h و θ، شرطهایی‌را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، با ثابت‌بودن مساحت سطح، حداکثر حجم برای گوه به‌دست آید.

K.۱۴۰ کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبداء را تا سطح $z=\frac{۸}{x^۲y}$ پیدا کنید.

K.۱۵۰ n نقطه را (که لزومی ندارد متمایز باشند)، برسطح کرهٔ به‌شعاع واحد طوری پیدا کنید که مجموع مجذورهای $\frac{n(n-۱)}{۲}$ فاصله‌ای که بین دوبه‌دوی این نقطه‌ها پیدا می‌شود، حداکثر مقدار ممکن باشد. ثابت کنید، این مجموع ماکزیمم، برابر است با $n^۲$. [این مساله، با جزئی تغییر، مساله‌ای است از بیست‌ونهمین مسابقهٔ ویلیام لاول پوتنام که به‌کمك انجمن ریاضی امریکا برگزار می‌شود، جای شگفتی است که، این ماکزیمم، از ماکزیممی که برای دایرهٔ واحد، درمساله F.۴ در بند ۵.۶ آوردیم، بیشتر نیست. در واقع، فضای بیشتری که به‌وسیلهٔ کره اشغال می‌شود، فایدهٔ چندانی به‌بار نمی‌آورد. باوجود این، مجموع خود $\frac{n(n-۱)}{۲}$ فاصلهٔ بین هردونقطه درکره، ماکزیممی بیشتراز مورد مربوط به دایره‌می‌دهد، مثلاً

برای حالت $n = ۴$.]

K.۱۶. ماکزیمم مجموع فاصله‌های $AB + BC + CA$ را، وقتی که A و B و C نقطه‌هایی از سطح کرهٔ به‌شعاع r باشند، پیدا کنید.

K.۱۷. درمسالهٔ قبلی، ماکزیمم‌مجموع $\mathrm{Arc}AB + \mathrm{Arc}BC + \mathrm{Arc}CA$ را پیدا کنید که، در آن، $\mathrm{Arc}AB$ به‌معنای کوتاه‌ترین فاصلهٔ از A تا B، روی سطح کره است.

فصل دوازدهم

نتیجه‌های هم‌پیرامونی، بدون پیش‌فرض «وجود»

۱۲.۱. نیاز به‌مطالعهٔ بیشتر و کامل‌تر. جدا از اثبات قضیه‌های هم‌پیرامونی در فصل‌چهارم، دراین فصل، بدون پیش‌فرض «وجود جواب» استدلاهایی را می‌آوریم. اندیشهٔ اصلی وتازه‌ای‌که دراین‌جا ارائه خواهیم داد، اندیشهٔ «چندضلعی موازی درونی» است‌که در بند بعدی، به تفصیل، دربارهٔ آن صحبت خواهیم‌کرد. در بند ۳.۱۲، از این اندیشهٔ استفاده می‌کنیم وبرای قضیهٔ هم‌پیرامونی درچندضلعی‌ها، اثبات‌کامل را می‌آوریم.

در بند ۳.۴ ثابت‌کردیم، اگر C_1 منحنی بستهٔ ساده‌ای، به‌جز دایره، باشد، آن‌وقت می‌توان منحنی دیگری مانند C_2، بامحیطی برابر بامحیط C_1، پیدا کرد، به‌نحوی‌که مساحت بیشتری را محصور کند. آیا ازاین‌جا می‌توان، بلافاصله، به‌این نتیجه‌رسیدکه دایره، دارای حداکثر مساحت‌است؟ روشن‌کردیم‌که، پاسخ به‌این پرسش، منفی است. در بند ۵.۴، دراین‌مورد، استدلال جالبی آوردیم‌که متعلق به‌اسکارپرون (Oscar Perron) است. می‌دانیم، برای هرعدد درست ومثبت، به‌جز ۱، عدد n^2 بزرگتراز n است یعنی برای هرعدد درست ومثبت، به‌جز واحد، عدد درست دیگری وجود داردکه بزرگتر است ولی البته، ازاین‌جا نمی‌توانیم به‌این‌نتیجه برسیم‌که، عدد ۱، بزرگترین است.

استدلال‌های هندسی رادماخر (Rademachar) و توپلیز (Toepliz)هم ـ سال۱۹۵۷ ـ به‌خوبی، نیاز به اثبات «وجود جواب» را نشان می‌دهند. این مولفان درکتاب خود، اثباتی برای قضیهٔ هم‌پیرامونی (براساس این‌فرض‌که جواب «وجود» دارد) داده‌اند، ولی در پایان تاکید کرده‌اندکه، این استدلال، کامل نیست و برای تکمیل آن باید به‌استدلال دقیق‌تری متوسل شوند وآن‌ها ترجیح داده‌اند از آن صرف‌نظرکنند، ولی

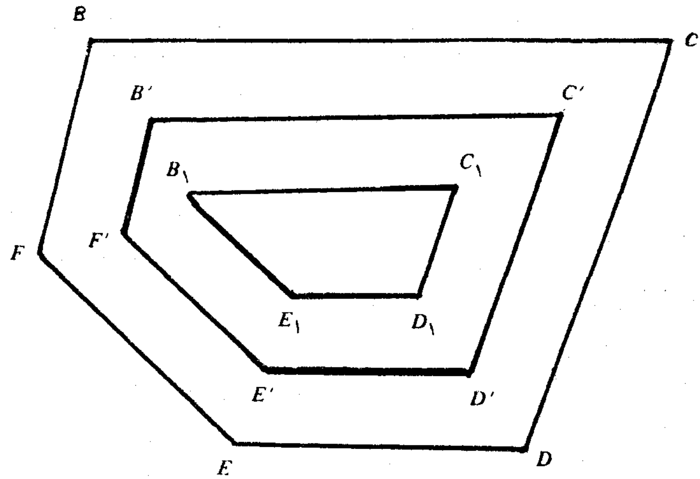
خواهیم دید که تنها با واردکردن «چندضلعی‌های موازی داخلی»، و بدون دخالت موضوع‌هـای نظری پیچیده، می‌توان اثبات را به‌طور کامل به‌پایان رساند.

اغلب مردم، این حدس را پذیرفته‌اندکه، دایره، بیشترین مساحت را محصور می‌کند. پس به‌چه مناسبت، مسالهٔ هم‌پیرامونی، تا این‌حد مشهور شده‌است؟ حقیقت این است که در ریاضیات نمی‌توان تنها به‌معرفت شهودی تکیه کرد وهمیشه، لزوم اثبات منطقی و بدون خدشه، احساس می‌شود.

۲.۱۲. چندضلعی موازی داخلی. از یك n ضلعی محدب دلخواه مثل P آغـاز می‌کنیم و ساختمانـی هندسی را تـوضیـح می‌دهیم کـه می‌تـواند به نتیجه‌گیری‌های نیرومندی منجر شود، فـرض کنیم، چندضلعی P، حرکتی انقباضی وموازی خود داشته باشد، یعنی همهٔ ضلع‌های آن، با سرعتی ثابت، منقبض و، درعین‌حال، بـه‌موازات خود، به‌داخـل چندضلعی منتقل شوند. درواقع، ضمن انقباض چندضلعی، راس‌های آن، روی نیمسازهای زاویه‌ها و به‌طرف داخل‌چندضلعی، حرکت می‌کنند. این روند، درجائی متوقف می‌شود که یك یا چندضلع ازچندضلعی P، ضمن انقباض‌خود، به‌یك‌نقطه تبدیل‌شود. برای چندضلعی P، سه‌حالت ممکن است پیش آید: چندضلعی P، به‌چندضلعی دیگـری باتعدادکمتر ضلع‌ها تبدیل شود؛ چندضلعی P، به‌یك پاره‌خط تبدیل شود؛ و بالاخره، چندضلعی P، به‌یك نقطهٔ منفرد تبدیل شود.

ابتدا حالتی را درنظر می گیریم که چندضلعی محدب P، ضمن انقباض خود، به‌چندضلعی دیگر P_1 (و البته، بـا تعداد ضلع‌های کمتر) تبدیل شود. دراین‌صـورت، چندضلعی P_1 را، چندضلعی موازی داخلی گوییم. در شکل ۲.۱۲-a، چندضلعی P عبارت‌است‌از $BCDEF$ و چندضلعی موازی‌داخلی P_1، چهارضلعی $B_1C_1D_1E_1$ است. ضلع BF، ضمن انقباض خود، به‌نقطهٔ B_1 منجر شده است. چندضلعی $B'C'D'E'F'$، دراین‌شکل، به‌عنوان‌یکی از مرحله‌های بینابینی، دراین روند انقباض، مشخص شده است.

درحالت‌دوم، روند انقباض، چندضلعی P را، به‌پاره‌خط راست B_1C_1



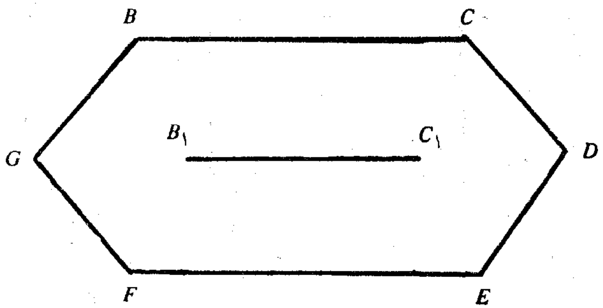
شکل ۲.۱۲-a

تبدیل کرده است (شکل ۲.۱۲-b). راس‌های B، G و F در B_1 جمع شده‌اند و راس‌های C، D و E در C_1.

درحالت سوم، تمامی چندضلعی P، ضمن انقباض خود، به یك نقطه می‌رسد وهمهٔ راس‌های P، دراین نقطه، متمرکز می‌شوند. این‌حالت، وقتی پیش می‌آیدکه چندضلعی P، یك چندضلعی محیطی باشدکه، دراین‌صورت، درمرکز دایرهٔ محاطی خود، منقبض می‌شود.

هدف ما این است که رابطهٔ بین‌مساحت‌ها ومحیط‌های چندضلعی P و چندضلعی موازی داخلی P_1 را مورد تجزیه وتحلیل قرار دهیم. r را فاصلهٔ حرکت هرچندضلعی P، ضمن انقباض خود تا رسیدن به‌چندضلعی موازی داخلی، یا پاره‌خط و یا نقطهٔ منفرد، می‌گیریم. از هر راس P_1، عمودهایی به‌طول r، بر نزدیك‌ترین ضلع‌های چندضلعی P فرود می‌آوریم. درشکل ۲.۱۲-c، که در واقع همان شکل ۲.۱۲-a است، این عمودها مشخص شده‌اند. به‌این‌ترتیب، چندضلعی P، به‌چندضلعی‌های دیگری، به‌شرح زیر، تقسیم می‌شود:

(۱) چندضلعی موازی داخلی P_1، که در شکل ۲.۱۲-c، چندضلعی



شکل ۲.۱۲–b

$B_1C_1D_1E_1$ است.

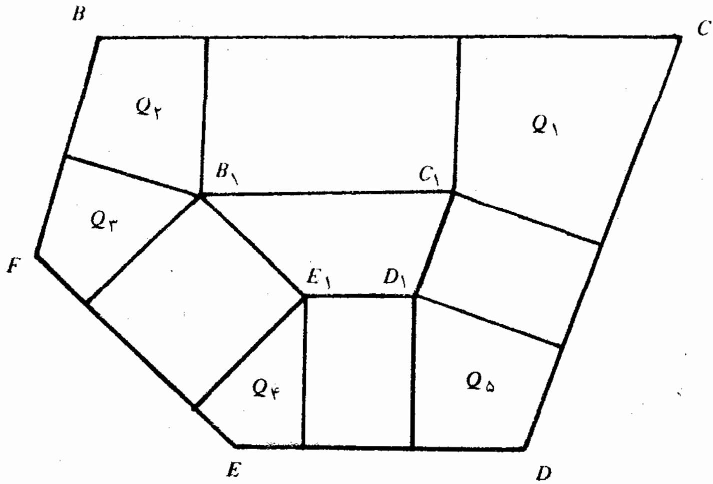
(۲) مستطیل‌هایی که روی ضلع‌های P_1 بنا شده‌اند و چون P_1 دارای چهارضلع است، در شکل هم، چهار تا از این مستطیل‌ها دیده می‌شود. در هریك از این مستطیل‌ها، دو ضلع روبه‌رو، برابر r است.

(۳) n چهارضلعی که متصل به‌هریك از راس‌های P پدید می‌آیند و، درشکل، آن‌ها را Q_1، Q_2، Q_3، Q_4 و Q_5 نامیده‌ایم. این چهارضلعی‌ها را می‌توان درکنارهم طوری قرار داد که یك nضلعی بـه وجود آوردند (شکل ۲.۱۲–d) و مـا آن را چندضلعی P^* نامیده‌ایم. این‌چندضلعی، بر دایره‌ای به‌شعاع r محیط‌است.

اکنون، اگر A، A_1 و A^* را مساحت‌ها و L، L_1 و L^* رامحیط‌های چندضلعی‌های P، P_1 و P^* فرض کنیم، داریم:

$$A = A_1 + rL_1 + A^*, \quad L = L_1 + L^* \qquad (۴)$$

A_1، rL و A^*، به‌ترتیب متناظر با بخش‌هـای (۱)، (۲) و (۳) از nضلعی P هستند. درستی برابری $L = L_1 + L^*$ هـم روشن است: وقتی P منقبض می‌شود و به‌صورت P_1 درمی‌آیـد، محیط P درست به‌انـدازهٔ بخش‌هایی از ضلع‌های P کـه درساختمان محیط چندضلعی P^* به‌کار رفته‌انـد، کوچك شده است. شبیه معادله‌های (۴)، برای حالتی هم‌که، چندضلعی موازی داخلی، به‌پاره‌خطی به‌طول d تبدیل می‌شود، برقرار‌است. این پاره‌خط، یعنی B_1C_1، درشکل ۲.۱۲–e نشان‌داده است که، درواقع، همان شکل ۲.۱۲–b است.



شکل ۲۰۱۲-d　　　　شکل ۲۰۱۲-c

بنابه‌تعریف، طول هریك ازعمودهایی که ازنقطهٔ $B_۱$ یا $C_۱$ برضلع‌های‌نزدیك P رسم شده‌اند، برابراست با r. دراین‌جا، چندضلعی P شامل دو بخش است: یك بخش از دو مستطیل تشکیل شده است که $B_۱C_۱$ ضلع مشترك آن‌هاست؛ دربخش دوم، n چهارضلعی وجود دارد که، مثل حالت قبلی، می‌توانند باهم جفت شوند و چند ضلعی P^* را به وجود آورند. مثل حالت قبلی، P^* یك چندضلعی محیطی است ومی‌توانند بردایره‌ای به‌شعاع r محیط باشد. دراین‌جا هم، شبیه برابری‌های (۴) را داریم:

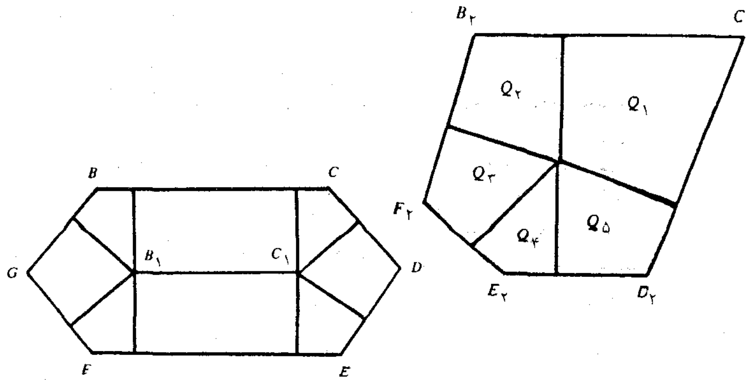
$$A = ۲rd + A^* ,\qquad L = ۲d + L^* \qquad (۵)$$

برابری‌های (۴) و (۵) در بحث‌های بعدی، نقشی اساسی دارند.

۳.۱۲. قضیهٔ هم‌پیرامونی

قضیهٔ ۲۰۱۲-a. ازبین همهٔ منحنی‌های بسته وسادهٔ با محیط مفروض، درصفحه، دایره بیشترین مساحت را محصور می‌کند.

درقضیهٔ ۳۰۴-b، همین قضیه را ثابت کردیم، منتهی با پیش‌فرض «وجود جواب». دراین‌جا، می‌خواهیم، بدون این پیش‌فرض، قضیه را ثابت کنیم.



شکل ۲۰۱۲ - e

قضیه را به‌صورت دیگری‌هم، می‌توان بیان‌کرد: نسبت هم‌پیرامونی، برای هـرمنحنی بستهٔ ساده در صفحه، به‌جز دایره،کـوچکتر از واحد است. برای اثبات قضیه، چهارحالت درنظر می گیریم:

حالت‌اول. چندضلعی‌های‌محیطی. اگرچندضلعی، بر دایره‌ای‌به‌شعاع r محیط باشد، ثابت می کنیم:

$$2A=rL \text{ ، } \quad L^2>4\pi A \text{ و } L>2\pi r \qquad (1)$$

که درآن‌ها، A مساحت و L محیط چندضلعی P است. معادلـهٔ $2A=rL$، به‌سادگی، و از راه وصـل مرکز دایره به‌راس‌هـای چندضلعی P و محاسبهٔ مساحت مثلث‌های حاصل، به‌دست می‌آید.

چون‌چندضلعی P بر دایرهٔ به‌شعاع r محیط است، بنابراین $A>\pi r^2$ و

$$rL=2A>2\pi r^2 \text{ ، } \quad L>2\pi r \text{ و } 4\pi A=2\pi rL<L^2$$

حالت دوم. چندضلعی‌های محدب. با استفاده از نظریهٔ چندضلعی‌های موازی داخلی، ثـابت می‌کنیم، نابرابری $L^2>4\pi A$، برای هـر n ضلعی محدب برقرار است. اثبات را بـا روش استقرای ریاضی روی n، می‌دهیم. به‌ازای $n=3$، چندضلعی به‌مثلث تبدیل می‌شود. مثلث، قابل محیط بر یك دایره‌است و، بنابراین، باتوجه به‌حالت اول، برای آن داریم: $L^2>4\pi r$.

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری مطلوب، برای هر چندضلعی محدب،

باتعداد ضلع‌های کمتر از n، برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، برای nضلعی محدب P، بـا مساحت A و محیط L نیز برقرار است. اگر P یك چندضلعی محیطی باشد، بنابه‌حالت اول، نابرابری مطلوب برقرار است. درموردی‌که، P، محیطی نباشد، بسته بـه‌این‌که چندضلعی مـوازی داخلی وجود داشته باشد و یا به‌یك پـاره‌خط تبدیل شده باشد، از معادله‌های (۴) یا (۵) استفاده می‌کنیم. اگرچندضلعی موازی داخلی P_1 وجود داشته‌باشد، تعداد ضلع‌های‌آن، ازتعداد ضلع‌های چندضلعی P، یعنی از n، کمتر است و، بنابراین، باتوجه به‌فرض استقرا داریم: $L_1^2 > 4\pi A_1$. چندضلعی P^* هم یك چندضلعی محیطی است، بنابراین $(L^*)^2 > 4\pi A^*$. همچنین، بنابررابطهٔ (۱) درحـالت اول داریـم: $L^* > 2\pi r$؛ بنابراین $2L_1 L^* > 4\pi r L_1$. ازمجموع این نابرابری‌ها، و باتوجه به‌معادله‌های (۴) بند قبل، به‌دست می‌آید:

$$L^2 = L_1^2 + 2L_1L^* + (L^*)^2 > 4\pi A_1 + 4\pi r L_1 + 4\pi A^* = 4\pi A$$

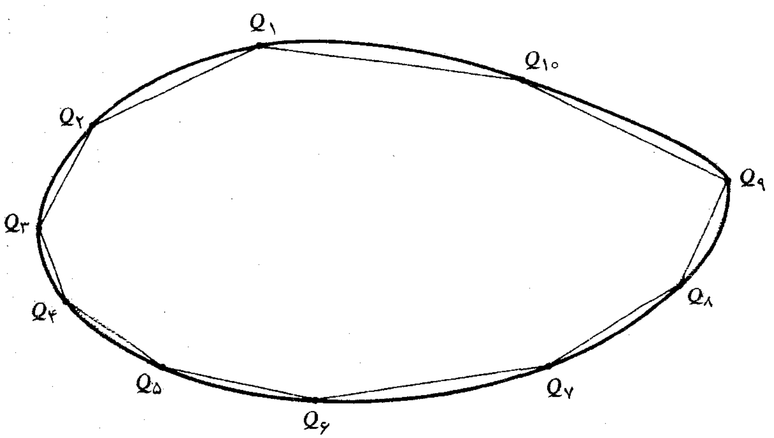
درموردی‌هم‌که، nضلعی موازی داخلی، به‌پاره‌خط تبدیل شده باشد، باتوجه به‌معادله‌های (۵) بندقبل، دوباره‌به نابرابری‌های $(L^*)^2 > 4\pi A$ و $L^* > 2\pi r$ می‌رسیـم (زیـرا، P^* یـك چندضلعی محیط بـر دایـرهٔ بـه‌شعاع r است). به‌این‌ترتیب

$$L^2 = (L^* + 2d)^2 = (L^*)^2 + 4dL^* + 4d^2 =$$
$$= 4\pi A^* + 8\pi r d + 4d^2 =$$
$$= 4\pi(A^* + 2rd) + 4d^2 =$$
$$= 4\pi A + 4d^2 > 4\pi A$$

حالت سوم. چندضلعی‌های مقعر. قشر محدب چندضلعی مقعرP، طبق آن‌چه درشکل ۲.۴-a نشان داده شده، چندضلعی محدبی است بـا مساحت بیشتر ومحیط کمتر و، بنابـراین، با نسبت هـم‌پیرامونی بـزرگتر. بـاتوجه به‌حالت دوم، معلوم می‌شود کـه، نسبت هـم‌پیرامونی در چندضلعی Q، از واحد کوچکتر است.

حالت چهارم. منحنی‌های بستهٔ ساده، به‌جز چندضلعی‌ها. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض‌کنید منحنی سادهٔ بسته‌ای، به‌جز دایره، وجود داشته باشدکه، برای‌آن، داشته باشیم: $L^۲ \leqslant ۴\pi A$. درحالت $L^۲ = ۴\pi A$ باتوجه به‌قضیهٔ ۳.۴-b، منحنی بسته وسادهٔ دیگری، باهمین محیط، وجود داردکه مساحت بیشتری را محصور می‌کند. بنابراین، حالت برابری منتفی است. اکنون فرض می‌کنیم، برای منحنی بسته و سادهٔ C، داشته باشیم: $L^۲ < ۴\pi A$. به‌جز این، می‌توانیم C را محدب بگیریم، زیرا در صورت مقعربودن چندضلعی، می‌توان مثل حالت سوم، قشر محدب آن را، که‌نسبت هم‌پیرامونی بزرگتری دارد، درنظر گرفت.

رابطهٔ $\beta = ۴\pi A - L^۲$ را درنظر می‌گیریم؛ با توجه به‌فرض باید داشته باشیم: $\beta > ۰$. n نقطه روی منحنی C انتخاب و یک n ضلعی به‌راس‌های این نقطه‌ها می‌سازیم (شکل ۳.۱۲-a). مساحت این nضلعی را $A_۲$ و محیط آن را $L_۲$ می‌گیریم. می‌توانیم n را به‌قدر کافی بزرگ انتخاب کنیم، به‌نحوی که $A_۲$، تاحد ممکن، به A نزدیک‌تر شود و داشته باشیم: $A - A_۲ < \frac{\beta}{۴\pi}$؛ درضمن، روشن است که $L_۲ < L$، زیرا مسیر خط راست



شکل ۳.۱۲-a

از مسیر منحنی کوتاه‌تر است. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$۴\pi A_۲ > ۴\pi A - \beta = L^۲ > L_۲^۲$$

ولی، بنابرآن‌چه در حالت‌های قبل ثابت کردیم، نسبت هم‌پیرامونی در هر چندضلعی دلخواه، کوچکتر از واحد است و، بنابراین، با یک تناقض مواجه می‌شویم. به‌این‌ترتیب، اثبات قضیهٔ هم‌پیرامونی کامل می‌شود.

قضیهٔ دیدو (Dido)، نتیجه‌ای ازقضیهٔ فوق است: نیم‌دایره، نسبت به‌هرمنحنی بستهٔ ساده‌ای که همان محیط را داشته باشد، مساحت بیشتری را محصور می‌کند. [همین‌حکم را درقضیهٔ ۲.۴-a، منتهی بافرض وجودمنحنی مطلوب، ثابت کردیم.] قضیهٔ اخیر، به‌سادگی، و با استفاده از قرینهٔ منحنی نسبت به‌خط‌راست، ثابت می‌شود.

L۰۱۰ از بین همهٔ مسیرهای ممکن، کوتاه‌ترین مسیری را پیدا کنیدکه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را نصف می‌کند. [از اصل تقارن استفاده کنید. اگر مسیر، در داخل مثلث ABC، ازنقطه‌ای روی AB و نقطه‌ای روی AC بگذرد، ABC' قرینهٔ ABC نسبت به‌AB را پیدا کنیم، بعدقرینهٔ ABC' را نسبت به‌AC' و به‌همین‌ترتیب، تا یک شش‌ضلعی منتظم به‌مرکز A به‌وجود آید. مسیر بسته‌ای که A را دور می‌زند، مساحت شش‌ضلعی را نصف می‌کند.]

۴.۱۲. قضیهٔ هم‌پیرامونی درچندضلعی‌ها

قضیهٔ ۴.۱۲-a. از بین همهٔ nضلعی‌های بامحیط مفروض، nضلعی منتظم بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی را دارد؛ یعنی، nضلعی منتظم بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی $\dfrac{۴\pi A}{L^۲}$ را دارد.

اثبات مشروط این قضیه را، با پیش‌فرض «وجود جواب»، در قضیهٔ ۳.۴-b داده‌ایم. درضمن اثبات کامل قضیه را هم، برای حالت‌های خاص $n = ۳,۴,۶$، به‌ترتیب، دربندهای ۲.۳، ۳.۳ و ۵.۳ دیده‌ایم.

نسبت‌هم‌پیرامونیnضلعی منتظم را C_n می‌گیریم (مقدار C_nرا دربند

۱.۶ محاسبه کرده‌ایم، ولی نیازی به‌آن نداریم). درقضیهٔ a-۲.۶ ثابت کردیم که، نسبت‌هم‌پیرامونی n ضلعی منتظم، با افزایش n، بزرگ می‌شود:

$$c_{۳}<c_{۴}<c_{۵}<c_{۶}<\dots \qquad (۱)$$

حالا به‌اثبات‌قضیهٔ a-۴.۱۲ برمی گردیم. چهارحالت‌درنظرمی گیریم:

حالت اول. چندضلعی‌های‌محیطی. درقضیهٔ c-۳.۶ ثابت کردیم که، بین تمام nضلعی‌های محیط بریک دایره، nضلعی منتظم، داری بزرگترین نسبت هم‌پیرامونی است.

حالت دوم. چندضلعی‌های‌محدب درحالت‌کلی. باتوجه به‌حالت‌اول، تنها به‌چندضلعی‌های محدبی می‌پردازیم‌که نمی‌توانند بر یک دایره محیط شوند. اثبات را با روش استقرای ریاضی می‌دهیم: استقرا روی n، تعداد ضلع‌های nضلعی. بنا به‌قضیهٔ a-۲.۳، حکم مطلوب به‌ازای $n=۳$، درست است. اکنون فرض می‌کنیم، قضیه، برای همهٔ چندضلعی‌های محدب باتعداد ضلع‌های کمتر از n درست باشد (فرض‌استقرا). ثابت می‌کنیم که دراین‌صورت، برای مساحت A و محیط L از nضلعی P داریم: $۴\pi A<c_nL^{۲}$. برای این منظور، ساختمان بند ۲.۱۲ را، برای چندضلعی P به‌کار می‌بریم. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که چندضلعی موازی داخلی $P_{۱}$ (مطابق شکل c-۲.۱۲)، با مساحت $A_{۱}$ ومحیط $L_{۱}$، وجود دارد. باتوجه به معادله‌های (۴) همان‌بخش، می‌توان نابرابری $۴\pi A<c_nL^{۲}$ را این‌طور نوشت:

$$۴\pi(A_{۱}+rL_{۱}+A^*)<c_n(L_{۱}+L^*)^{۲}$$

که می‌توانیم آن را، به‌کمک نابرابری‌های زیر ثابت‌کنیم:

$$۴\pi A_{۱}<c_nL_{۱}^{۲},\quad ۴\pi rL_{۱}\leqslant ۲c_nL_{۱}L^*,\quad ۴\pi A^*\leqslant c_n(L^*)^{۲} \qquad (۲)$$

که در آن‌ها، نخستین نابرابری، اکید است. چون چندضلعی موازی داخلی $P_{۱}$، کمتر از n ضلع دارد، بنابراین $۴\pi A_{۱}<c_{n-۱}L_{۱}^{۲}$ (بنابه‌فرض استقرا)؛ و اولین نابرابری (۲)، با استفاده از (۱) به‌دست می‌آید.

سومین نابرابری (۲)، نتیجه‌ای از حالت اول است، زیرا P^*، یک

nضلعی محیط بر دایره‌ای به‌شعاع r می‌باشد. (دراین‌حالت، ممکن است برابری $۴\pi A^* = c_n(L^*)^۲$ پیش‌آید، چرا که P^*می‌تواندمنتظم ازآب‌درآید). همچنین، باتوجه به‌رابطهٔ (۱) ازبندقبل، می‌دانیم $۲A^* = rL^*$ (برای P^*).

اگر درنابرابری $۴\pi A^* \leqslant c_n(L^*)^۲$ قرار دهیم: $A^* = \frac{۱}{۲}rL^*$، به‌دست‌می‌آید:

$$۲\pi r \leqslant c_n L^* \qquad (۳)$$

و نابرابری دوم (۲)، ازهمین نابرابری نتیجه می‌شود.

حالتی را درنظر می‌گیریم که چندضلعی موازی داخلی، به‌پاره‌خط راستی به‌طول d تبدیل شده باشد. [حالتی که چندضلعی موازی داخلی،منجر به‌یك‌نقطه شود، وقتی پیش می‌آیدکه چندضلعی P، قابل محیط‌کردن بر یك دایره‌باشد و، دراین‌صورت، به‌حالت اول برمی‌گردد.] دراین‌جا،معادله‌های (۵) ازبند ۲.۱۲ برقرارند و برای‌نابرابری $۴\pi A < c_n L^۲$، می‌توان‌نوشت:

$$۴\pi(۲rd + A^*) < c_n(۲d + L^*)^۲$$

و این نابرابری، ازمجموع سه‌نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$۰ < ۴c_n d^۲, \quad ۴\pi rd \leqslant ۴c_n dL^*, \quad ۴\pi A^* \leqslant c_n(L^*)^۲ \qquad (۴)$$

نابرابری اول(۴) روشن است؛ نابرابری دوم (۲)، بلافاصله، از (۳)نتیجه می‌شود ونابرابری سوم (۴)، شبیه نابرابری سوم (۲) است‌که، قبلاً، ثابت‌کردیم.

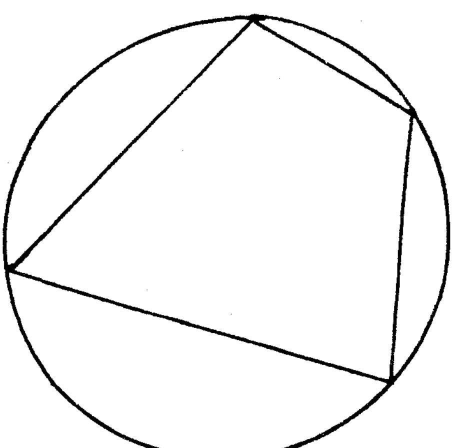
حالت سوم. nضلعی‌های مقعر. nضلعی مقعر P با مساحت A ومحیط L مفروض است، باید ثابت‌کنیم: $۴\pi A < c_n L^۲$. H را قشر محدب P، با مساحت $A_۲$ و محیط $L_۲$ می‌گیریم. بنابراین $A_۲ > A$ و $L_۲ < L$. علاوه براین، قشر محدب H، کمتر از nضلع دارد، بنابراین، $۴\pi A_۲ < c_n L_۲^۲$، نتیجه‌ای ازحالت‌های اول و دوم و نابرابری‌های (۱) است؛ که از آن‌جا، بلافاصله، نابرابری $۴\pi A < c_n L^۲$ نتیجه می‌شود. به‌این‌ترتیب، اثبات‌قضیهٔ ۴.۱۲-a کامل شد.

۵.۱۲. چندضلعی‌هایی که ضلع‌های متناظر برابر دارند

قضیهٔ ۵.۱۲–a. در بین چندضلعی‌هایی که طول ضلع‌های متناظر آن‌ها برابر است، چندضلعی قابل محاط در دایره، مساحت بیشتری دارد.

این قضیه را، برای چهارضلعی‌ها، در قضیه ۳.۳–b ثابت کردیم و، اکنون، به‌اثبات آن درحالت کلی می‌پردازیم.

P را چندضلعی محاط در دایرهٔ به‌شعاع r می‌گیریم (درشکل ۵.۱۲–a، حالت چهارضلعی رسم شده است). P_1 را چندضلعی دیگری فرض می‌کنیم که ضلع‌هایش با طول‌هایی برابر ضلع‌های P و به‌همان ردیف باشند، ولی دوچندضلعی P و P_1 هم‌نهشت نباشند، یعنی نتوانند برهم منطبق شوند. از هر دو راس مجاور P_1، کمانی از دایرهٔ به‌شعاع r را رسم می‌کنیم، قطعه دایره‌هایی به‌دست می‌آید که باقطعه‌دایره‌های نظیر خود در P، هم‌نهشت‌اند (شکل ۵.۱۲–b را ببینید). به‌این‌ترتیب، P_1 به‌وسیلهٔ کمان‌هایی محاصره می‌شود که طول مجموع آن‌ها، برابر $2\pi r$ است. بنابه‌قضیهٔ هم‌پیرامونی، مجموع مساحت P_1 با قطعه دایره‌های محیط برآن، ازمساحت دایرهٔ به‌شعاع r کمتر است، یعنی مساحت کلی شکل ۵.۱۲–b، کمتراز مساحت کل شکل ۵.۱۲–a است با کم کردن مساحت قطعه دایره‌ها، معلوم می‌شود که‌مساحت

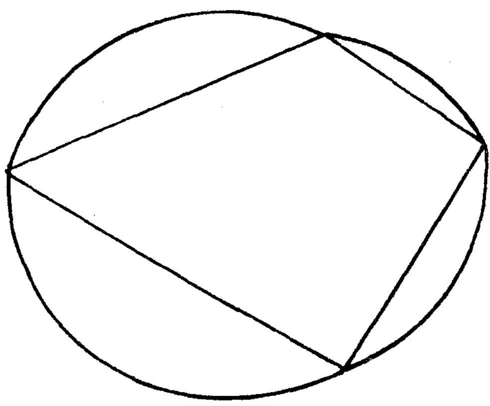


شکل ۵.۱۲–a

P_1، ازمساحت P کمتر است.

اگـر، ضلع‌های متناظر دو n ضلعی برابر نباشند، یعنی ردیف ضلع‌ها در دو n ضلعی به‌هم بخورد، آن‌وقت، قضیهٔ ۵.۱۲-a دیگر درست نیست. درواقع، اگر باوصل مرکز دایرهٔ محیطی P به‌راس‌های آن، دایرهٔ به‌شعاع r را به n قطـاع تقسیم کنیم، می‌توان این n قطاع را بـاهرترتیب دلخواه، کنارهم گذاشت و بازهم دایره‌ای به‌شعاع r به‌دست آورد. دایرهٔ جدیدمحیط بر nضلعی جدیدی است که باهمان ضلع‌های P، ولی باترتیب دیگری، ساخته شده است.

این نکته‌را هم یادآوری کنیم که، قضیهٔ ۵.۱۲-a را، می‌توان به‌عنوان نتیجه‌ای ازحالت چهارضلعی (قضیهٔ ۳.۳-b) بـه‌دست آورد، به‌شرطـی که این فرض را بپذیریم کـه چند ضلعی P^* با مساحت ماکزیمم و طول مشخص ضلع‌ها، وجود دارد. استدلال بسیار ساده است: بنابه‌قضیهٔ ۳.۳-b، هرچهار رأس متوالی P^* بر یـک دایره قـرار دارند و، ازاین‌رو، همه راس‌ها، روی محیط یك دایره‌اند.



شکل ۵.۱۲-b

یادداشتی در بارهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی

بیشتر مساله‌هایی که دراین کتاب آمده است، به‌کمك روش‌هایی که در دوازده فصل کتاب آورده‌ایم، خیلی راحت‌تر حل می‌شوند تا به‌کمك محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی. و این، اگر چه مایهٔ شگفتی است، به‌این‌مناسبت است که مساله‌ها را به‌صورتی مناسب و درخور بحث خود انتخاب کرده‌ایم. برعکس، درکتاب‌های مربوط به محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، می‌توان مساله‌هایی در زمینهٔ اکسترمم را پیدا کرد که به سختی به روش‌های این کتاب، تن‌می‌دهند. محاسبهٔ دیفرانسیلی وانتگرالی، به‌صورت گسترده‌ای، با گونه‌های مختلف تابع‌ها سروکار دارد.

در بیشتر مساله‌ها، نمی‌توان تابع ساده‌ای، که به‌محاسبهٔ دیفرانسیلی وانتگرالی‌مربوط شود، پیدا کرد. یکی ازاین‌مساله‌ها، پیدا کردن‌چهارضلعی با مساحت ماکزیمم، از بین‌چهارضلعی‌های بامحیط ثابت است. برای‌مشخص کردن این گونه چهارضلعی‌ها، به چهار متغیر، از بین ضلع‌ها و زاویه‌ها، نیاز داریم، مثلاً طول سه‌ضلع و اندازهٔ یکی از زاویه‌ها [هرچهارضلعی با معلوم بودن پنج جزء خود، مشخص می‌شود وچون، دراین‌جا، مقدار محیط چهارضلعی معلوم است، برای مشخص‌کردن آن، باید چهار جزء دیگرمعلوم باشد. م.] و تنظیم تابع مساحت، برحسب این چهارمتغیر، روش ساده‌ای برای حل مساله نیست.

نمونهٔ دیگر، قرار دادن پنج‌نقطه برمحیط دایره به شعاع واحد است، به‌نحوی‌که مجموع ۱۰ فاصلهٔ بین هر دونقطه، ماکزیمم باشد (و این، یکی از مساله‌هائی است که درسال ۱۹۷۴، در امریکا، درمسابقه‌های ریاضی ویلیام‌لاول پوتنام داده شده است). مفهوم‌های «ماکزیمم» و «مینیمم»، در ذهن برخی از دانشجویان، چنان با مفهوم «مشتق» درآمیخته است که،

بلافاصله، به‌جست‌وجوی تابعی می‌روند که بتوانند، به‌کمك مشتق آن، به‌جواب برسند. ولی اغلب، خود تابع را به‌زحمت به‌دست می‌آورند و یا با تابعی از چند متغیر سروکار پیدا می‌کنند که کار با مشتق آن پیچیده و نومیدکننده است. مسالهٔ ماکزیمم کردن مجموع ۱۰ فاصله، نمونهٔ مشخصی از این گونه مساله‌هاست. پنج نقطهٔ دایرهٔ واحد، پنج زاویهٔ مرکزی رامشخص می‌کنند که، هرکدام از آن‌ها، متناظر دو نقطهٔ متوالی است. این پنج زاویه را، که مجموعی برابر ۲π دارند، با $۲\theta_۱$، $۲\theta_۲$، ...، $۲\theta_۵$ نشان می‌دهیم. آن‌وقت، مجموعی که باید ماکزیمم شود، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sum_{i=۱}^{۵} sin\theta_i+\sum_{i=۱}^{۵} sin(\theta_i+\theta_{i+۱})$$

(مجموع دوم، $\theta_۱=\theta_۶$). اگر قضیهٔ ۲.۵-b را، در مورد هریك از این مجموع‌ها به‌طور جداگانه، به‌کار بریم، بلافاصله به زاویه‌های برابر $\theta_۱$، ...، $\theta_۵$ می‌رسیم، که جواب مساله است. درحالی‌که اگر به‌سراغ مشتق‌های این مجموع برویم، با موقعیت پیچیده و نومیدکننده‌ای روبه‌رو می‌شویم.

البته، این نمونه‌ها، به هیچ‌وجه از اعتبار «محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی» کم نمی‌کند، محاسبه‌ای که درواقع، ابزار نیرومندی در «جعبه‌ابزار» ریاضی است. بحث ما، چیزی از اهمیت این «ابزار» نمی‌کاهد، بلکه تاکیدی براین موضوع است که این، تنها «ابزار» در «جعبه ابزار ریاضی» نیست. همان‌طور که گفتیم، در محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، می‌توان تابع‌های مختلف و متنوعی‌را موردبررسی‌قرارداد که باروش‌های این کتاب قابل‌مطالعه نیستند. مثلاً می‌توان از تابع‌های نمائی و لگاریتمی نام برد. محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، شیوه‌های بهتری برای کار با این تابع‌ها دارد و، همان‌طور که انتظار می‌رود، بهتر وساده‌تر از عهدهٔ آن‌ها برمی‌آید. تصادفی نیست که، دراین کتاب، هیچ‌بحثی دربارهٔ تابع‌های نمائی ولگاریتمی نداشتیم.

به‌کمك تابع‌های نمائی، می‌توان روش بسیار ساده‌ای برای اثبات نابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وهندسی پیدا کرد. این اثبات زیبا را

دراین‌جا، از کتاب هاردی، لیتل‌وود و پولیا (چاپ ۱۹۵۲)، با اندکی تغییر می‌آوریم.

تنها زمینه‌ای که برای این اثبات لازم است، قضیهٔ سادهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱. برای هر عدد حقیقی x داریم: $e^x \geqslant ex$؛ علامت برابری، تنها برای $x=1$ برقرار است.

اثبات این قضیه، بلافاصله، با بررسی تابع $f(x)=e^x-ex$ به‌دست می‌آید. مشتق اول این تابع $f'(x)=e^x-e$، تنها به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود. مشتق دوم $f''(x)=e^x$، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، مثبت است. بنابراین، تابع $f(x)$، درنقطهٔ $x=1$، به‌می‌نیمم مطلق خودمی‌رسد، یعنی $f(x)\geqslant 0$ و $e^x \geqslant ex$.

اکنون، مجموعهٔ عددهای غیرمنفی a_1، a_2، ...، a_n را با واسطهٔ حسابی A و واسطهٔ هندسی G، درنظر می گیریم. در نابرابری $e^x \geqslant ex$، به‌جای x، پشت‌سرهم، مقدارهای $\frac{a_1}{A}$، $\frac{a_2}{A}$، ...، $\frac{a_n}{A}$ را قرار می‌دهیم؛ سپس، نابرابری‌های حاصل را درهم ضرب می‌کنیم، باتوجه به $a_1+a_2+\ldots+a_n=nA$، به‌دست می‌آید:

$$e^n \geqslant e^n\cdot\frac{a_1}{A}\cdot\frac{a_2}{A}\cdots\frac{a_n}{A}=e^n\cdot\frac{G^n}{A^n}$$

که‌اگر عامل e^n را حذف کنیم، به‌نابرابری $\frac{G^n}{A^n}\leqslant 1$ می‌رسیم و ازآن‌جا $A\geqslant G$. علاوه‌براین، علامت‌برابری، تنهاوقتی‌برقرار است که‌همهٔ‌مقدارهایی که به‌جای x قرار داده‌ایم، برابر واحد باشند، یعنی

$$\frac{a_1}{A}=\frac{a_2}{A}=\ldots=\frac{a_n}{A}=1 \Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$$

ولی، پیروزی واقعی «محاسبهٔ دیفرانسیلی» وقتی ظاهر می‌شود که قضیهٔ کلی‌تر زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۲. q_1، q_2، ...، q_n را، عددهای حقیقی مثبت به‌مجموع واحد می‌گیریم. آن‌وقت، اگر a_1، a_2، ...، a_n عددهـای حقیقی غیرمنفی باشند، داریم:

$$q_1a_1+q_2a_2+\ldots+q_na_n \geqslant a_1^{q_1}.a_2^{q_2}\ldots a_n^{q_n} \qquad (1)$$

علامت برابری، تنهاوقتی برقراراست که داشته‌باشیم: $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

نابرابری مربوط به‌واسطه‌هـای حسابی وهندسی، حالت خاصی ازاین نابرابری است، یعنی وقتی که داشته باشیم: $q_1=q_2=\ldots=q_n=\frac{1}{n}$.

برای اثبات قضیه، سمت چپ نابرابری (۱) را w می‌نامیم:

$$w=q_1a_1+q_2a_2+\ldots+q_na_n$$

اکنون، درنابرابری $e^x \geqslant ex$، به‌جای x، مقدار $\frac{a_i}{w}$ را قـرار مـی‌دهـیـم، به‌دست می‌آید:

$$e^{\frac{a_i}{w}} \geqslant e.\frac{a_i}{w} \Rightarrow e^{\frac{a_iq_i}{w}} \geqslant \left(e.\frac{a_i}{w}\right)^{q_i}$$

این نابرابری‌ها را، به‌ازای $i=1,2,\ldots,n$ درهـم ضرب می‌کنیم، باتوجه به‌تعریف w وباتوجه به‌برابری $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$، به‌دست می‌آید:

$$e \geqslant e.\frac{a_1^{q_1}.a_2^{q_2}\ldots a_n^{p_n}}{w}$$

که بلافاصله، منجر به‌نابرابری (۱) می‌شود. عـلاوه‌براین، علامت برابری تنها وقتی برقرار است‌که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{w}=\frac{a_2}{w}=\ldots=\frac{a_n}{w}=1 \Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$$

ازقضیهٔ ۱، دونتیجهٔ دیگر هم می‌توان بلافاصله به‌دست آورد:

قضیهٔ ۳. ماکزیمم مقدار $x^{\frac{1}{x}}$، به‌ازای‌همهٔ مقدارهای حقیقی و مثبت x،

برابر است با $e^{\frac{1}{e}}$.

برای اثبات، درنابرابری قضیهٔ ۱، x را به $\frac{x}{e}$ تبدیل می‌کنیم:

$$e^{\frac{x}{e}} \geqslant x \Rightarrow e^{\frac{1}{e}} \geqslant x^{\frac{1}{x}}$$

و علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم $\frac{x}{e}=1$، یعنی $x=e$.

قضیهٔ ۴. اگر $b>a\geqslant e$ یا $0<b<a\leqslant e$، آن‌گاه $a^b>b^a$. حالت خاصی ازاین نابرابری $e^\pi<\pi^e$ است.

اثبات قضیه را از حالت $b>a\geqslant e$ آغاز می‌کنیم، داریم: $\frac{a}{e}\geqslant 1$ و $b-a>0$، بنابراین

$$\left(\frac{a}{e}\right)^{b-a} \geqslant 1 \Rightarrow a^b e^a \geqslant e^b a^a \qquad (2)$$

و اگر درنابرابری قضیهٔ ۱، به‌جای x، قرار دهیم $\frac{b}{a}$:

$$e^{\frac{b}{a}} \geqslant e.\frac{b}{a} \Rightarrow a^b.e^q > e^a.b^a \qquad (3)$$

(نابرابری اکید است، زیرا $\frac{b}{a}\neq 1$). از(۲) (۳) نتیجه می‌شود:

$$a^b e^a \geqslant e^a.b^a \Rightarrow a^b \geqslant b^a$$

درحالت $0<b<a\leqslant e$ داریم: $\frac{e}{a}\geqslant 1$ و $a-b>0$، بنابراین

$$\left(\frac{e}{a}\right)^{a-b} \geqslant 1 \Rightarrow a^b.e^a \geqslant e^b.a^a$$

و دنبالهٔ اثبات، شبیه حالت قبل انجام می‌گیرد.

M۱۰ با استفاده ازمشتق، یا بدون استفاده ازمشتق، بزرگترین عدد حقیقی x را طوری پیداکنیدکه دنبالهٔ

$$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, \ldots$$

متقارب و دارای حدی متناهی باشد. این حد، چقدر است؟

حل مسأله‌ها

۱۰A. از دستور (۳) برای $\theta+\lambda=180^\circ$ استفاده کنید؛ بنابراین $\cos(\theta+\lambda)=-1$. سپس ثابت کنید: $s-a=b$ و $s-c=d$.

۲۰A. بله. اگر x را به‌عنوان طول قطر درونی در نظر بگیریم، اثبات (۳)، به‌قوت خود باقی است.

۳۰A. ابتدا واحد دلخواهی برای طول انتخاب می‌کنیم. مساحت مثلث $A=\frac{1}{2}bh$ است (b و h، به‌ترتیب، طول قاعده و طول ارتفاع مثلث‌اند). اکنون، اگر واحد جدید طول را، $\sqrt{A}$ برابر واحد اصلی طول بگیریم، آن‌وقت، طول‌های قاعده و ارتفاع مثلث نسبت به واحد جدید، به‌ترتیب، برابر $\frac{b}{\sqrt{A}}$ و $\frac{h}{\sqrt{A}}$ می‌شوند که، درنتیجه، مساحت مثلث، برابر واحد درخواهد آمد.

۴۰A. مثال $a=3$، $b=4$، $c=6$ نشان می‌دهد که، از نابرابری $a+b>c$، نمی‌توان نتیجه گرفت که $a^2+b^2>c^2$. ولی، از نابرابری $a+b>c$، می‌توان نابرابری $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ را نتیجه گرفت، زیرا اگر داشته باشیم: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{c}$، آن‌وقت، با مجذور کردن دو طرف نابرابری، به نابرابری $a+b+2\sqrt{ab}\leqslant c$ می‌رسیم که نابرابری $a+b>c$ را نقض می‌کند.

۵۰A. نتیجهٔ $a>d$ درست است، زیرا با توجه به فرض‌ها، می‌توان نوشت:

$$a>\frac{a+b}{2}>\frac{c+d}{2}>d$$

ولی سه‌نابرابری دیگر $a>c$، $b>c$ و $b>d$، ممکن است برقرار نباشند. به‌عنوان مثال نقض می‌توان درنظر گرفت:

$$a=10, b=8, c=11, d=5 \quad \text{یا} \quad a=10, b=2, c=6, d=5$$

۶۰.A. برای $a>1$ داریم: $\max(a,a^2)=a^2$ و برای $0<a<1$: $\max(a,a^2)=a$. دربخش‌دوم پرسش، ماکزیمم‌عبارت‌است‌از $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

۷۰.A. برابری II.

۸۰.A. بله. با‌توجه به‌نابرابری $a+b>c$ و با توجه به‌این‌که $\sin\alpha$، $\sin\beta$، $\sin\gamma$ باضلع‌های a، b و c متناسب‌اند، نتیجه می‌شود.

۹۰.A. اگر درنابرابری روشن $a+b>2\sqrt{ab}$، به‌جای a و b مقدارهای x_1 و $\frac{c}{x_1}$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x_1+\frac{c}{x_1}>2\sqrt{c} \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{c}{x_1}\right)>\sqrt{c}$$

و اگر a و b را درنابرابری $a+b>2\sqrt{ab}$ برابر x_{n-1} و $\frac{c}{x_{n-1}}$ بگیریم، به‌طور کلی، به دست می‌آید $x_n>\sqrt{c}$.

ازهمین نابرابری $x_n>\sqrt{c}$ نتیجه می‌شود: $\frac{c}{x_n}<\sqrt{c}$، که اگر x_n را به‌دو طرف آن اضافه کنیم، به‌نابرابری $2x_{n+1}<x_n+\sqrt{c}$ می‌رسیم. دوطرف نابرابری اخیر را نصف می‌کنیم و، سپس، $\sqrt{c}$ را از دو طرف کم می‌کنیم، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

۱۰۰.A. نه. مثلاً برای‌سه‌تایی‌های $A=\{2,4,9\}$، $B=\{1,6,8\}$ و $C=\{3,5,7\}$ داریم: $A>B$ و $B>C$، درحالی‌که $C>A$.

۱.B. اگر $u=ax$ و $v=by$ بگیریم، حاصل‌ضرب uv مقداری‌ثابت می‌شود، زیرا

$$u.v=ax.by=ab(xy)=abc$$

مجموع دو متغیر مثبتی که حاصل‌ضرب ثابت دارند، وقتی به‌حداقل خود می‌رسدکه، این دو متغیر با هم برابر باشند (نتیجه ۳). از $u=v$ نتیجه می‌شود. $u=v=\sqrt{abc}$. بنابراین، کمتر مقدار $u+v$ برابر است با $۲\sqrt{abc}$. درضمن، از برابری‌های $u=ax=\sqrt{abc}$ و $v=by=\sqrt{abc}$، به‌دست می‌آید: $x=\sqrt{\frac{bc}{a}}$ و $y=\sqrt{\frac{ac}{b}}$ (که حاصل‌ضرب آن‌ها، برابر c می‌شود).

B.۲۰ چون هرسه‌عدد باهم برابر نیستند، مثلاً فرض می‌کنیم $b\neq c$. دراین‌صورت داریم:

$$a^۲+b^۲\geqslant ۲ab ،\ a^۲+c^۲\geqslant ۲ac ،\ b^۲+c^۲>۲bc$$

(نابرابری سوم، حتماً یك‌نابرابری اکید است). اگر این سه‌نابرابری راباهم جمع و، سپس، دو طرف نابرابری حاصل را نصف‌کنیم، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

B.۳۰ اگر عدد را x بگیریم، باید ببینیم به‌ازای چه‌مقداری از x، عبارت $x-x^۲$ ماکزیمم می‌شود! بنابه‌قضیهٔ ۲.۲-a، حداکثر مقدار $cx-x^۲$ تنها به‌ازای $x=\frac{c}{۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین بیشترین مقدار $x-x^۲$ درحالت $x=\frac{۱}{۲}$ پیش می‌آید.

B.۴۰ دو نابرابری $a+b>۲\sqrt{ab}$ و $\frac{۲ab}{a+b}<\sqrt{ab}$ هم‌ارزند، زیرا دومی را می‌توان باضرب اولی در $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ به‌دست آورد.

B.۵۰ $u=x^۴$ و $v=۲y^۴$ می‌گیریم. حاصل‌ضرب $u.v$ مقداری است ثابت، زیرا $uv=۲x^۴y^۴=۲c^۴$. بنابراین، می‌بینیم $u+v$ وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم: $u=v=\sqrt{۲}c^۲$. به‌این‌ترتیب، حداقل مقدار

$x^۴+۲y^۴$ برابراست با $۲\sqrt{۲}c^۲$ که به‌ازای $x=۲^{\frac{۱}{۸}}c^{\frac{۱}{۲}}$ و $y=۲^{-\frac{۱}{۸}}c^{\frac{۱}{۲}}$ به‌دست می‌آید.

B.۶. کمترین مقدار $x^۲+ax$ برابر $-\frac{a^۲}{۴}$ است که به‌ازای $x=-\frac{a}{۲}$ به‌دست می‌آید. همچنین کمترین مقدار $y^۲+by$ برابر $-\frac{b^۲}{۴}$ است (به‌ازای $x=-\frac{b}{۲}$). بنابراین حداقل عبارت موردنظر، برابر $c-\frac{a^۲}{۴}-\frac{b^۲}{۴}$ است.

B.۷. همهٔ نتیجه‌ها، به‌کمك دو اتحاد زیر، به‌دست می‌آیند:

$$۲cx-x^۲=c^۲-(x-c)^۲;\quad x+\frac{c^۲}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{c}{\sqrt{x}}\right)^۲+۲c$$

B.۸. اگر نابرابری‌های روشن $xr\leqslant\frac{x^۲+r^۲}{۲}$ و $ys\leqslant\frac{y^۲+s^۲}{۲}$ را باهم جمع کنیم به‌دست می‌آید:

$$xr+ys\leqslant\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲+r^۲+s^۲)=۱$$

بنابراین ماکزیمم $xr+ys$ برابر است با ۱، که مثلاً به‌ازای $x=r=۱$ و $y=s=۰$ به‌دست می‌آید.

B.۹. پاسخ: ۴۰۵، که به‌ازای $۲۰x=y=۹۰$ به‌دست می‌آید.

B.۱۰. پاسخ: $۳۰\sqrt{۳}$ و یا به‌تقریب ۵۱/۹۶. اگر سرعت را برابر x بگیریم، $\frac{۴۰۰}{x}$ ساعت در راه است. راننده به‌اندازهٔ $\frac{۳۲۰۰k}{x}$ دلار دستمزد می‌گیرد. هزینهٔ سوخت درهرساعت برابر $k\left(۱+\frac{x}{۴۰}+\frac{x^۲}{۳۰۰}\right)$ دلار و در $\frac{۴۰۰}{x}$ ساعت برابر $k\left(\frac{۴۰۰}{x}+۱۰+\frac{۴x}{۳}\right)$ دلارمی‌شود. به‌این‌مبلغ، دستمزد

راننده را اضافه‌می کنیم، به‌دست می‌آید: $k\left(\frac{۳۶۰۰}{x}+۱۰+\frac{۴x}{۳}\right)$. اگر از ثابت‌های k و ۱۰ صرف‌نظر کنیم، باید حداقل مقدار $\frac{۳۶۰۰}{x}+\frac{۴x}{۳}$ را به‌دست آوریم. این دو جملهٔ جمع، حاصل‌ضرب ثابتی دارند، بنابراین، حداقل مجموع به‌ازای $\frac{۴x}{۳}=\frac{۳۶۰۰}{x}$ به‌دست می‌آید.

B.۱۱. اگر به‌جای x و y، مقدارهای G و $\frac{xy}{G}$ را قرار دهیم، باید ثابت کنیم: $x+y>G+\frac{xy}{G}$. اگر دو طرف این نابرابری را در G ضرب و، سپس، مرتب کنیم، به‌نابرابری $(G-x)(y-G)>۰$ می‌رسیم. این نابرابری درست است، زیرا واسطهٔ‌هندسی دوعدد، بین کوچکترین و بزرگترین عدد قرار دارد (به‌شرطی که دوعدد، باهم برابر نباشند)، یعنی $x<G<y$. این روند، مجموع $a_۱+a_۲+\ldots+a_n$ را، سرانجام، به‌مجموع $G+G+\ldots+G$ می‌رساند، زیرا در هر گام، دست‌کم یکی از جمله‌ها، به G تبدیل می‌شود.

B.۱۲. I. وقتی‌مجموع سه‌متغیر مثبت، مقداری‌ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که، این سه متغیر، با هم برابر باشند. به‌این‌ترتیب: $x=y=z=\frac{۵}{۳}$ و مقدار حداکثر xyz برابر $\frac{۱۲۵}{۲۷}$ می‌شود.

II. دراین‌جا هم، درحاصل‌ضرب $(۲x)(۳y)(۴z)$، مجموع عامل‌ها مقداری است ثابت، بنابراین حداکثر حاصل‌ضرب به‌ازای $۲x=۳y=۴z=۱۲$، یعنی $x=۶$، $y=۴$ و $z=۳$ به دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، حداکثر xyz برابر ۷۲ است.

B.۱۳. شبیه بخش II مسالهٔ قبل حل می‌شود. پاسخ: $\frac{k^۳}{۲۷abc}$.

B.۱۴. چون‌عامل‌های‌ضرب‌درحاصل‌ضرب $(۳x)(۳x)(۴y)$، مجموعی

ثابت دارند، بیشترین مقدار این حاصل‌ضرب به‌ازای

$$۳x=۳x=۵y=۱۵ \Rightarrow x=۵، y=۳$$

به‌دست می‌آید. پاسخ: ۷۵.

B.۱۵. $x-y$ را z می‌نامیم، بنابراین $z>0$. مساله منجر به‌این می‌شود که حداقل مجموع $y+z+\frac{۸}{yz}$ را پیدا کنیم. حاصل‌ضرب سه جملهٔ این مجموع، یعنی $y.z.\frac{۸}{yz}$ مقداری است ثابت. به‌این‌ترتیب، باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$y=z=\frac{۸}{yz} \Rightarrow y=z=۲ \text{ و } x=۴$$

حداقل مجموع موردنظر، برابر است با ۸.

B.۱۶. اگر عکس این عبارت‌ها را درنظر بگیریم، باید حداقل هریك ازعبارت‌های زیر را پیدا کنیم:

$$x+\frac{a}{x}،\quad x+\frac{a}{x^۲}،\quad x^۲+\frac{a}{x}$$

نخستین عبارت، مجموع دوجمله‌ای است که حاصلضربی ثابت و برابر a دارند؛ بنابراین، حداقل مجموع به‌ازای $x=\frac{a}{x}$ یا $x=\sqrt{a}$ به‌دست‌می‌آید.

برای مجموع دوم، آن را به‌صورت $\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}+\frac{a}{x^۲}$ می‌نویسیم. دراین‌جاهم حاصل‌ضرب سه جملهٔ جمع ثابت می‌شود، بنابراین باید داشته باشیم: $\frac{x}{۲}=\frac{a}{x^۲}$ یا $x=\sqrt[۳]{۲a}$. برای‌عبارت سوم، شبیه‌مثال ۳ از ۶.۲§ عمل‌کنید.

پاسخ: ماکزیمم‌های مطلوب، به‌ترتیب عبارتند از

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}،\quad \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{a}}،\quad \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{a^2}}$$

B·۱۷. ماکزیمم این عبارت، همراه با ماکزیمم مجذور آن، یعنی $x^2(1-x^2)$ ظاهر می‌شود و، دراین‌جا، باضرب دو عاملی سروکار داریم که مجموعی ثابت دارند، بنابراین، ماکزیمم آن به‌ازای $x^2=1-x^2$ و یا $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به‌دست می‌آید. پاسخ: $\frac{1}{2}$.

B·۱۸. این عبارت وقتی غیرمنفی است که داشته باشیم: $x\leqslant 2\sqrt{3}$. بنابراین باید جواب x را باشرط $0<x\leqslant 2\sqrt{3}$ پیدا کنیم. با مجذور کردن عبارت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$2(2x^2)(12-x^2)(12-x^2)$$

اگرضریب ثابت۲ را، برای لحظه‌ای، کنار بگذاریم، با حاصل‌ضرب‌سه‌عاملی سروکار پیدا می‌کنیم که مجموعی ثابت (برابر ۲۴) دارند. بنابراین، باید داشته باشیم: $2x^2=12-x^2$ یا $x=2$، پاسخ: ۳۲.

B·۱۹. مجموع را به‌صورت $\frac{1}{2}rh+\frac{1}{2}rh+r^2$ می‌نویسیم. حاصل‌ضرب سه‌جملهٔ این مجموع برابر $\frac{1}{4}r^4h^2$، یعنی $\frac{1}{4}c^2$ می‌شود که‌مقداری است‌ثابت. بنابراین مجموع مفروض، وقتی به‌حداقل می‌رسدکه داشته باشیم: $r^2=\frac{1}{2}rh$، یعنی، $h=2r$. از این برابری وبرابری $r^2h=c$ به‌دست می‌آید: $r=\sqrt[3]{\frac{c}{2}}$. پاسخ: $3\sqrt[3]{\frac{c^2}{4}}$.

B·۲۰. اگر عددمجهول را x بگیریم، باید حداکثر مقدار $x-x^3$ را، برای مقدارهای مثبت x پیدا کنیم. ابتدا $x-x^3$ را به‌صورت $x(1-x^2)$ می‌نویسیم و، سپس، بامجذور کردن آن، به‌این‌عبارت می‌رسیم:

$$\frac{1}{2}(2x^2)(1-x^2)(1-x^2)$$

بدون توجه به‌عامل ثابت $\frac{1}{2}$، با ضرب سه‌عاملی سروکار داریم که مجموع آن‌ها، مقداری ثابت (برابر ۲) است. بنابراین، باید داشته باشیم:
$2x^2=1-x^2$، یا $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B.۲۱. باید حداکثر عبارت x^2-x^3 یا $x^2(1-x)$ را، برای مقدارهای مثبت x، پیدا کنیم. عبارت را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$4\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)(1-x)$$

که، بدون توجه به‌عامل ثابت ۴، مجموع سه‌عامل دیگر مقدار ثابتی(برابر واحد) است. پس باید داشته باشیم: $\frac{x}{2}=1-x$. پاسخ: $x=\frac{2}{3}$.

B.۲۲. جمله‌های مجموع، حاصل‌ضرب ثابتی برابر ۱۰۰ دارند. بنابراین، باید داشته باشیم: $xy=\frac{20}{y}=\frac{50}{x}$، که از آن‌جا به‌دست‌می‌آید:
$x=5$ و $y=2$. پاسخ: ۳۰.

B.۲۳. اگر جملهٔ ثابت ۱۲ را کنار بگذاریم، می‌بینیم که کسرهای $\frac{x}{y}$، $\frac{2y}{z}$ و $\frac{4z}{y}$، حاصل‌ضرب ثابتی برابر ۸ دارند. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{y}=\frac{2y}{z}=\frac{4z}{x} \Rightarrow x=2y=2z$$

حداقل عبارت مفروض، برابر است با ۱۸.

B.۲۴. راهنمائی: عبارت را به‌صورت $3x+3x+\frac{24}{x^2}$ بنویسید.

پاسخ: کمترین مقدار عبارت برابر ۱۸ و به‌ازای $x=2$.

۲۵.B. راهنمائی: عبارت مفروض را به‌صورت زیر بنویسید:

$$\left(۱-\frac{۲}{y}-\frac{۲}{y}-\frac{۳}{x}\right)\left(\frac{۲}{y}\right)\left(\frac{۲}{y}\right)\left(\frac{۳}{x}\right)$$

که عامل‌های آن، مجموعی ثابت (برابر ۱) دارند. پاسخ: $\frac{۱}{۲۵۶}$ به‌ازای $x=۱۲$ و $y=۸$.

۲۶.B. حاصل‌ضرب جمله‌های مجموع مفروض، مقداری ثابت و برابر ۶×۴۸^۲ است. بنابراین، باید داشته باشیم: $xy=۲xz=۳yz$. این معادله‌ها، باتوجه به‌معادلهٔ $xyz=۴۸$، منجر به‌جواب‌منحصر به‌فرد $x=۶$، $y=۴$ و $z=۲$ می‌شوند. پاسخ: ۷۲.

۲۷.B. حاصل‌ضرب جمله‌های مجموع مفروض برابر $۱۲۰x^۳y^۳$ و مقداری ثابت است. ولی معادله‌های $x^۲=۱۲y=۱۰xy^۲$، باتوجه‌به‌شرط $xy=۶$ جواب‌ندارند. بنابراین، باید روش دیگری را انتخاب کنیم. از شرط $xy=۶$ به‌دست می‌آید $y=\frac{۶}{x}$ و بنابراین

$$x^۲+۱۲y+۱۰xy^۲=x^۲+\frac{۷۲}{x}+\frac{۳۶۰}{x}=x^۲+\frac{۴۳۲}{x}$$

اگر این مجموع را به‌صورت $x^۲+\frac{۲۱۶}{x}+\frac{۲۱۶}{x}$ بنویسیم، با مجموع جمله‌هایی سروکار پیدا می‌کنیم که حاصل‌ضرب ثابتی دارند و، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$x^۲=\frac{۲۱۶}{x} \Rightarrow x=۶$$

و از آن‌جا $y=۱$ ومقدار حداقل عبارت مفروض، برابر ۱۰۸ می‌شود.

۲۸.B. اگر دو پرانتز را درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۳+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$$

حداقـل مجموع در هـریـك از پرانتزها، برابر است با ۲ کـه تنها بەازای $x=y=z$ بەدست می‌آیـد. بنابراین، حداقل مقدار عبارت مفروض برابر ۹ می‌شود. درحالت $x+y+z=c$، حـداقل عبارت $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ برابـر است بـا $\frac{9}{c}$.

B.۲۹. اگر همهٔ نابرابرهای بـەصورت $a_i^2+a_j^2\geqslant 2a_ia_j$ را، برای $1\leqslant i<j\leqslant n$، بـاهم جمع کنیم، درسمت چپ نابرابری مجموع، هرکدام از مقدارهـای a_1^2، a_2^2، ...، a_n^2، بەاندازهٔ $(n-1)$ بار ظـاهر می‌شوند و، بنابراین، بەهمان نابرابری مطـلوب می‌رسیم. درضمن، اگر دست‌کم دو تا از aها بـاهم برابر نباشد، مثلاً $a_2\neq a_4$، برای آن‌ها، بـەنابرابری اکید $a_2^2+a_4^2>2a_2a_4$ و، درنتیجه، درکل نابرابری هم، به یك نابرابری‌اکید می‌رسیم.

B.۳۰. واسطهٔ مربعی هر مجموعەای از عددهـا، همیشه مثبت است، مگر آن‌که همهٔ عددها برابر صفر بـاشندکه، دراین‌صورت، $R=A=0$ و درغیراین‌صورت، کافی است ثابت کنیم $R^2\geqslant A^2$، یعنی

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n^2}$$

که اگر دوطرف را در n^2 ضرب‌کنیم و، سپس، پرانتز سمت راست رابەتوان برسانیم، بعدازخلاصه‌کردن، بەهمان نابرابری مساله B.۲۹ می‌رسیم.

B.۳۱. اگر پرانتزهای سمت راست را بازکنیم، بەدست می‌آید:

$$f(x)-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2=nx^2-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)x=$$
$$=n(x^2-2Ax)$$

و بنا بەقضیهٔ ۲.۲-a، حـداقل مقدار داخـل پرانتز، تنها بـەازای $x=A$ بەدست می‌آید.

B.۳۲. مجموعهٔ عددهای $\{1,2,2,2,2\}$ برای بخش اول‌ومجموعهٔ

عددهای $\{۲، ۱، ۱، ۱، ۱\}$ برای بخش دوم مساله.

B.۳۳. درستی این نابرابری، از خود تعریف معادله‌های (۱) به‌دست می‌آید، زیرا

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

B.۳۴. این نابرابری، نتیجه‌ای از دو نابرابری $f(m)<g(m)$ [مسالهٔ B.۳۳] و $g(m)<g(k)$ [نابرابری‌های (۳)] می‌باشد.

B.۳۵. به‌سادگی داریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}$$

B.۳۶. پاسخ: $\sqrt[3]{3}$. روشن است که $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$. با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، برای $n>4$ داریم: $\sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n}$. فرض می‌کنیم: $3^n>n^3$ و ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت $3^{n+1}>(n+1)^3$. دوطرف نابرابری $3^n>n^3$ را در ۳ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید: $3^{n+1}>3n^3$. بنابراین کافی است ثابت کنیم: $3n^3>(n+1)^3$؛ و این نابرابری ازمجموع رابطه‌های $n^3=n^3$، $n^3>3n^2$ و $n^3>3n+1$ به‌دست می‌آید.

B.۳۷. پاسخ: ۸− و ۱. راهنمائی، باتوجه به‌غیرمنفی‌بودن x^4 و x^2، درهرمورد، ازقضیهٔ a-۲.۲ استفاده کنید [برای سه‌جمله‌ای x^4+6x^2+1 می‌توان آن را، به‌صورت $(x^2+3)^2-8$ نوشت. حداقل $(x^2+3)^2$، با توجه به‌غیرمنفی بودن x^2، برابر ۹ و، بنابراین، حداقل عبارت، برابر واحد است.]

B.۳۸. پاسخ: $\frac{1}{8}$. حل: عبارت مفروض را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$۵۴ \times ۱۰۸ \times \frac{x}{۲}\cdot\frac{x}{۲}\cdot\frac{y}{۳}\cdot\frac{y}{۳}\cdot\frac{y}{۳}(۱-x-y)$$

می‌بینیم که مجموع عامل‌ها، بدون توجه به ضریب عددی ۵۴×۱۰۸، مقداری ثابت (برابر ۱) است. بنابراین، حداکثر حاصل‌ضرب به‌شرطی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=۱-x-y \Rightarrow x=\frac{۱}{۳},\ y=\frac{۱}{۲}$$

B.۳۹۰ نابرابری $x^۳+۱ \geqslant ۲x$، برای همهٔ مقدارهای مثبت x، برقرار نیست (مثلاً برای $x=\frac{۴}{۵}$). بزرگترین مقدار k، برابر است با $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}}$.
برای اثبات، ازقضیهٔ ۲.۳-a استفاده می‌کنیم. دراین‌صورت داریم:

$$x^۳+۱=x^۳+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{x^۳}{۴}}$$

این نابرابری، برای همهٔ مقدارهای مثبت x برقرار است و، به‌ازای $\frac{۱}{۲}=x^۳$، به‌برابری تبدیل می‌شود.

B.۴۰۰ برابری برای $a^۲=b^۳=c^۶$ برقرار است. نابرابری را می‌توان با استفاده از قضیهٔ ۲.۵-a، یعنی نابرابری $A \geqslant G$، ثابت‌کرد. برای این منظور n را برابر ۶ و برای عددهای $a^۲$،$a^۲$،$a^۲$،$b^۳$،$b^۳$ و $c^۶$ درنظر بگیرید.

B.۴۱۰ از برابری $(a+b)^۲=(c+d)^۲$ و نابرابری $a^۲+b^۲>c^۲+d^۲$، نتیجه می‌شود: $ab<cd$. اکنون، اگر دو نابرابری زیر را، باهم جمع کنید، به‌نتیجه مطلوب می‌رسید:

$$(a+b)(a^۲+b^۲)>(c+d)(c^۲+d^۲) \quad \text{و} \quad -ab(a+b)>-cd(c+d)$$

B.۴۲۰ پاسخ: بزرگترین مقدار برابر است با ۳؛ برای این‌عبارت،

کوچکترین مقدار وجود ندارد. حل: اگر عکس این‌عبارت را بنویسیم:

$$\frac{\sqrt{(x+۲)^۲+۸۱}+\sqrt{(x+۲)^۲+۳۶}}{۴۵}$$

می‌بینیم که، برای آن، ماکزیمم وجود ندارد [با بزرگ‌شدن x، مقدار آن تا بی‌نهایت بزرگ می‌شود]، ولی در $x=-۲$ به‌می‌نیمم خود می‌رسد.

۴۳.B پاسخ: $k=۶۲$. حل: برای $k=۱،۲،۳،...،۶۰$، می‌توان عدد n را ازبین عددهای

$$n=۹،۱۸،۲۷،...،۹۹۰$$

به‌دست‌آورد درضمن، برای $n=۱۰۹۸$ داریم: $n=۶۱S(n)$ ثابت می‌کنیم $n=۶۲S(n)$ جواب ندارد. ابتدا توجه می‌کنیم که، اگر n عددی سه‌رقمی مثل stu باشد، برابری $n=۶۲S(n)$ نمی‌تواند برقرار شود، زیرا

$$stu=۶۲(s+t+u) \Rightarrow ۹(۱۱s+t)=۶۱(s+t+u)$$

و به‌سادگی معلوم می‌شود که معادلهٔ اخیر، برای s، t و u جواب ندارد. اگر n را چهاررقمی بگیریم (بارقم‌های r، s، t و u)، به‌این‌معادله‌می‌رسیم:

$$۹(۱۱۱r+۱۱s+t)=۶۱(r+s+t+u)$$

که بازهم، برای رقمهای r، s، t و u، جواب ندارد. (باتوجه به‌این نکته که باید $۱۱۱r+۱۱s+t$ بر ۶۱ و $r+s+t+u$ بر ۹ بخش‌پذیر باشند). اگر n، عددی پنج‌رقمی باشد، آن‌وقت $S(n)\leqslant ۴۵$ و درنتیجه $n=۶۲S(n)\leqslant ۲۷۹$ که فرض پنج‌رقمی بودن عدد را نقض می‌کند. همین استدلال، برای عددهایی هم که بیشتر از پنج‌رقم داشته باشند، درست‌است.

۴۴.B پاسخ: $x=-\frac{b}{۲a}$.

۴۵.B پاسخ: ۱۵. راهنمایی: اگر تبدیل $x=X-۲y$ را انجام دهیم، به‌چندجمله‌ای

$$۴X^۲-۹y^۲-۲۴x+۱۸y+۶۰$$

می‌رسیم. مقدار حداقل، به‌ازای $X=3$ و $y=1$ یا $x=5$ و $y=1$ به‌دست می‌آید.

۴۶.B این، تنها راه، برای تنظیم شرطهای لازم و کافی نیست. می‌توان شرطهای لازم و کافی را، به‌صورت $a>0$ و $ac>b^2$ یا، $a>0$، $ac=b^2$ و $ae=bd$ تنظیم کرد (در شرطهای اخیر، می‌توان به‌جای $a>0$ شرط $c>0$ به‌جای $ae=bd$ شرط $be=cd$ را قرار داد). برای اثبات، باید توجه کنیم که، شرطهای $a>0$ و $b>0$ لازم‌اند، زیرا مثلاً، اگر a منفی باشد، آن‌وقت $f(x,0)=ax^2+bx+k$، می‌نیمم ندارد. همچنین، درعبارت

$$f\left(X-\frac{by}{a}\,,\;y\right)=aX^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2+dX+\left(e-\frac{db}{a}\right)y+k$$

اگر داشته باشیم $c-\frac{b^2}{a}<0$، حداقلی برای عبارت وجود ندارد. درحالت $c-\frac{b^2}{a}=0$، عبارت f تنها وقتی می‌نیمم دارد که ضریب y برابر صفر شود، یعنی داشته باشیم: $ae=bd$.

۱.C این، بیان‌دیگری ازقضیهٔ ۳.۲-a است. درمثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع a، برای مساحت A و محیط L، به‌ترتیب، $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ و $3a$ به‌دست‌می‌آید و، بنابراین، به‌برابری $A=\frac{\sqrt{3}L^2}{36}$ می‌رسیم. چون هرمثلث دیگری باهمین محیط L، مساحت کمتری دارد، نابرابری مساله روشن می‌شود.

۲.C پاسخ برای هر دوحالت، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. اگر ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه را x و y بنامیم، وتر برابر با $\sqrt{x^2+y^2}$ می‌شود. برای پیدا کردن مثلثی با مساحت ماکزیمم، باید ماکزیمم $\frac{1}{2}xy$ را بافرض ثابت‌بودن x^2+y^2 پیدا کرد، ماکزیمم x^2y^2 را

جست‌وجو می‌کنیم. چون $x^۲+y^۲$ مقداری ثابت است، بنابراین $x^۲y^۲$ وقتی به ماکزیمم خود می‌رسد که داشته باشیم: $x^۲=y^۲$ یا $y=x$. برای ماکزیمم کردن محیط، باید حداکثر $x+y$ یا $(x+y)^۲$ و یا $x^۲+y^۲+۲xy$ را پیدا کنیم. چون $x^۲+y^۲$ مقداری ثابت است، مساله دوباره منجر به پیدا کردن ماکزیمم xy می‌شود و بازهم به‌همان جواب $y=x$ می‌رسیم.

C.۳۰ باتوجه به‌راهنمائی پایان صورت مساله، داریم:

$$PA^۲+PB^۲+PC^۲=(x-a_۱)^۲+(y-a_۲)^۲+(x-b_۱)^۲+$$
$$+(y-b_۲)^۲+(x-c_۱)^۲+(y-c_۲)^۲=۳x^۲-۲(a_۱+b_۱+c_۱)x+$$
$$+۳y^۲-۲(a_۲+b_۲+c_۲)y+a_۱^۲+a_۲^۲+b_۱^۲+b_۲^۲+c_۱^۲+c_۲^۲$$

که عبارت درجه دومی برحسب x و y است (بدون جملهٔ شامل xy). باتوجه به‌قضیهٔ ۲.۲-a و نتیجهٔ ۱، به‌جواب موردنظر می‌رسیم.

C.۴۰ طول ضلع‌های PQ، PR و QR را، به‌ترتیب، x، y و z می‌گیریم. بنابرفرض $x+y=c$. مساحت‌مثلث، برابر است با $\frac{۱}{۲}xy\sin P$؛ و چون زاویه P مقداری ثابت است: I. باید xy ماکزیمم شود که، باتوجه به‌ثابت‌بودن مجموع $x+y$، به‌دست می‌آید: $y=x$. II. باید z می‌نیمم شود. رابطهٔ کسینوس‌ها را درمثلث، می‌نویسیم:

$$z^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos P=c^۲-۲xy(۱+\cos P)$$

به‌این‌ترتیب، بازهم بایدماکزیمم xy را پیدا کنیم، که‌منجر به‌جواب $y=x$ می‌شود.

C.۵۰ پاسخ: مساحت‌مشترک، برابر است با ۱۲۰؛ دایره‌های محیطی دو چهارضلعی برابرند. فرض‌کنید چهارضلعی $Q_۱$، با راس‌های P، R، S و T و به‌همین ردیف، در دایره‌ای به مرکز C محاط شده باشد. اگر قطاع‌های PCR، RCS، SCT و TCP را جدا کنیم، می‌توان دوباره و با کنارهم قراردادن آن‌ها، به هرترتیب دلخواه، دایره‌ای برابر دایرهٔ C و محیط بر چهارضلعی جدید $Q_۲$ به‌دست آورد. این چهارضلعی $Q_۲$، همان ضلع‌های ۸،

۹، ۱۲ و ۱۹ را دارد، منتهی به‌ترتیب دیگری.

C.۶۰ پاسخ: اگر ضلع ثابت را کنار بگذاریم، باید سه‌ضلع دیگر چهارضلعی باهم برابر باشند و، درضمن، چهارضلعی قابل محاط در یك دایره باشد. برای اثبات، طول ضلع‌ها را، برابر a، x، y و z می‌گیریم (a، طول ضلع ثابت است). اگر محیط چهارضلعی را $۲s$ بنامیم، داریم:

$$s=\frac{۱}{۲}(x+y+z+a)$$

که، درآن، s، بنابرفرض، مقداری ثابت است. مساحت چهارضلعی محاطی، با این رابطه بیان می‌شود:

$$A^{۲}=(s-a)(s-x)(s-y)(s-z)$$

وحاصل‌ضرب $(s-x)(s-y)(s-z)$، باتوجه به ثابت بودن مجموع عامل‌ها، وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$s-x=s-y=s-z \Rightarrow x=y=z$$

C.۷۰ پاسخ: ۱۸.

C.۸۰ پاسخ: مستطیل را باید ۱۵۰ × ۳۰۰ (فوت) وضلع بزرگتر را موازی مسیر رودخانه انتخاب کرد. اگر طول ضلع عمود بر مسیر رودخانه را، x بگیریم، برای نرده‌کشی، به‌سه‌طول با اندازه‌های x، x و $۶۰۰-x$ نیاز داریم.

مساحت این‌مستطیل، برابر $x(۶۰۰-۲x)$ یا $۲x(۳۰۰-x)$ می‌شود که، برای ماکزیمم بودن آن، باید داشته باشیم:

$$x=۳۰۰-x \Rightarrow x=۱۵۰$$

C.۹۰ پاسخ: ضلع‌های چهارضلعی، باید به طول‌های ۲۰۰، ۲۰۰، ۲۰۰ و ۴۰۰ باشند (ضلع بزرگتر، مجاور به‌رودخانه) و زاویه‌هایی برابر ۶۰ درجه، ۶۰درجه، ۱۲۰درجه و ۱۲۰درجه داشته باشد، یعنی‌چهارضلعی مطلوب، نصف یك شش‌ضلعی منتظم است.

برای اثبات، طول ضلع‌های چهارضلعی را x، y، z و w می‌گیریم که w، ضلع مجاور به‌رودخانه است. باید داشته باشیم $x+y+z=600$.
نصف محیط این چهارضلعی، برابر است با $s=300+\frac{w}{2}$. چهارضلعی باید قابل محاط در یك دایره باشد، بنابراین مجذور مساحت آن چنین است:

$$A^2=(s-x)(s-y)(s-z)(s-w)$$

که باتوجه به‌مقدار s، می‌توان نوشت:

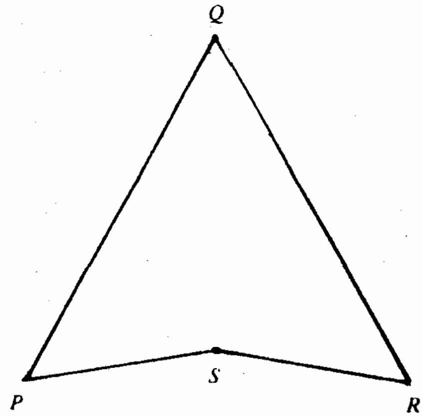
$$3A^2=\left(300-x+\frac{w}{2}\right)\left(300-y+\frac{w}{2}\right).$$

$$.\left(300-z+\frac{w}{2}\right)\left(900-\frac{3w}{2}\right)$$

دراین ضرب، مجموع عامل‌ها مقداری ثابت و برابر ۱۲۰۰ است، بنابراین این عامل‌ها باید باهم برابر وهرکدام برابر ۳۰۰ باشند. ازآن‌جا، به دست می‌آید:

$$x=y=z=\frac{w}{2}=200$$

۱۰.C. چهارضلعی مقعر $PQRS$ را درنظر می‌گیریم که، راس S آن، در داخل مثلث PQR قرار دارد (شکل ۱۰.C). محیط این‌چهارضلعی، مقداری ثابت و برابر c است. اگر طول ضلع‌های PQ، QR، RS و SP را به‌ترتیب، برابر x، y، z و w بگیریم، داریم: $x+y+z+w=c$. مساحت چهارضلعی، ازمساحت مثلث PQR کمتراست، زیرا $PR<z+w$. درضمن، مساحت مثلث PQR هم، ازمساحت مثلث به ضلع‌های x، y و $z+w$ کمتر است. مثلث اخیر، محیطی‌ثابت و برابر c دارد، بنابراین باتوجه به‌قضیهٔ ۳.۲-a، حداکثر مساحت آن، برابر $\frac{c^2\sqrt{3}}{36}$ و مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع به‌محیط‌ثابت c است. به‌این‌ترتیب، نابرابری‌موردنظرمساله،



شکل ۱۰۰c

ثابت‌می‌شود. ثابت‌می کنیم، چهارضلعی‌مقعر بامحیط c وجود دارد، به‌نحوی که‌مساحت‌آن،هرقدرکه‌بخواهیم، به $\frac{c^{2}\sqrt{3}}{36}$ نزدیك می‌شود. $x=y=\frac{c}{3}$ و $z=w=\frac{c}{6}$ می گیریم (نقطهٔ S، در داخل مثلث PQR است). این‌نقطهٔS، خیلی به‌پاره‌خط PR نـزدیك است. مساحت مثلث PQR، به‌تقریب برابر $\frac{c^{2}\sqrt{3}}{36}$ است؛ مساحت چهارضلعی $PQRS$ هم، هرقدرکه بخواهیم، به‌همین مقدار نزدیك می‌شود. اگر بخواهیم، مساحت چهارضلعی $PQRS$ برابر با این مقدار باشد، باید نقطهٔ S بر پاره‌خط PR واقـع باشدکه ممکن نیست، زیرا چهارضلعی به‌مثلث تبدیل می‌شود.

۱۱.C. چهارضلعی‌را $PQRS$ و نقطهٔ‌برخورد وقطرآن را Kمی گیریم ونابرابری‌های

$$PK+KQ>PQ \quad \text{و} \quad PK+KS>RS$$

را باهم جمع‌کنیم، به‌این‌نتیجه می‌رسیم کـه، مجموع دو قطر p_1+p_2، از مجموع دوضلع روبه‌رو درچهارضلعی بیشتر است. می‌توان نابرابری‌مشابهی

برای دوضلع دیگر روبه‌رو به‌دست‌آورد و، ازمجموع آن‌ها، نابرابری‌سمت چپ صورت مساله را پیدا کرد.

همچنین داریم: $PQ+QS>PS$. اگر این نابرابری را با سه نابرابری مشابه خود (دربارهٔ ضلع‌های مجاور) جمع کنیم، به‌نابرابری سمت راست صورت مساله می‌رسیم.

۱۲.C از هشت نابرابری به‌صورت $p_i>a_j$، تنها دو نابرابری، در همهٔ حالت‌ها برقرارند: $p_۲>a_۱$ و $p_۲>a_۲$. از شش نابرابری به‌صورت $p_۱+p_۲>a_r+a_s$، تنها دو نابرابری درهمهٔ حالت‌ها برقرار نیست: $p_۱+p_۲>a_۲+a_۴$ و $p_۱+p_۲>a_۳+a_۴$. نابرابری‌هایی که همیشه برقرار نیستند، می‌توان با مثال تاییدکرد. در لوزی به‌ضلع واحد و زاویهٔ حادهٔ ۳۰ درجه، نابرابری‌های $p_۱>a_j$، برای $J=۱،۲،۳،۴$ برقرار نیست. در چهارضلعی به راس‌های $(\pm۵،۰)$، $(۰،۱۰)$ و $(۰،-۱)$، در دستگاه مختصات‌دکارتی، دو نابرابری $p_۲>a_۳$ و $p_۲>a_۴$ نقض می‌شود. در چهارضلعی به‌راس‌های $(\pm۱۰،۰)$ و $(\pm۱،۱)$، نابرابری‌های $p_۱+p_۲>a_۲+a_۴$ و $p_۱+p_۲>a_۳+a_۴$ نادرست ازآب درمی‌آیند.

برای اثبات‌این‌که، بقیهٔ نابرابری‌ها، همیشه برقرارند، سه‌حالت‌درنظر می‌گیریم: درحالت اول، دو ضلع روبه‌رو را $a_۱$ و $a_۲$، در حالت دوم، دو ضلع روبه‌رو را $a_۱$ و $a_۳$ و درحالت سوم، $a_۱$ و $a_۴$ را دو ضلع روبه‌رو فرض می‌کنیم. در مساله $۱۱.C$ ثابت کردیم، مجموع دو قطر چهارضلعی همیشه از مجموع طول‌های دوضلع روبه‌رو بیشتر است. بنابراین، درحالت اول داریم: $p_۱+p_۲>a_۳+a_۴$، درحالت دوم: $p_۱+p_۲>a_۲+a_۴$ و درحالت سوم: $p_۱+p_۲>a_۲+a_۳$ و $p_۱+p_۲>a_۱+a_۴$. ازاین‌جا معلوم می‌شودکه، دو نابرابری اخیر، درهمهٔ حالت‌ها برقرارند، زیرا $a_۱\leqslant a_۲\leqslant a_۳\leqslant a_۴$؛ از همین دو نابرابری، بلافاصله نتیجه می‌شود که نابرابری‌های $p_۱+p_۲>a_۱+a_۲$ و $p_۱+p_۲>a_۱+a_۳$، همواره برقرارند. همچنین، ازنابرابری $p_۱+p_۲>a_۲+a_۳$، می‌توان، با منطقی ساده، نتیجه گرفت: $p_۲>a_۲$ و $p_۲>a_۱$.

۱۳.C. پاسخ: وقتی‌که زاویهٔ PCQ قائمه باشد. در واقع، اگر شعاع دایره را برابر r و زاویه PCQ را برابر θ بگیریم، مساحت مثلث برابر $\frac{۱}{۲}r^{۲}sin\theta$ می‌شود ومساله، منجر به‌ماکزیمم‌کردن $sin\theta$ می‌شود.

۱۴.C. طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را با x، y و z نشان می‌دهیم. حجم مکعب مستطیل، برابر xyz و مساحت آن $S=۲xy+۲yz+۲xz$ می‌شود. حاصل‌ضرب جمله‌های این مجموع، مقداری‌ثابت‌است، بنابراین، S وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$۲xy=۲yz=۲yz \Rightarrow x=y=z$$

۱۵.C. اگر شبیه مسالهٔ قبل، بعدهای مکعب مستطیل را با x، yوz نشان دهیم، حجم آن $xyz=K$ مقداری ثابت است. بایدمجموع سطح جانبی وسطح قاعدهٔ آن، یعنی $xy+۲xz+۲yz$ حداقل شود.حاصل‌ضرب جمله‌های این مجموع، یعنی $۴x^{۲}y^{۲}z^{۲}$، برابر $۴K^{۲}$ ومقداری ثابت است، بنابراین وقتی می‌نیمم می‌شود که

$$xy=۲xz=۲yz \Rightarrow x=y=۲z$$

که‌باتوجه‌به $xyz=K$ به‌دست‌می‌آید: $x=y=\sqrt[۳]{۲K}$ و $z=\sqrt[۳]{\frac{K}{۴}}$.

۱۶.C. پاسخ: $۵۰\times۵۰\times۳۰$ (فوت) که ۳۰، ارتفاع آن است. x، y و z را، به‌ترتیب، طول، عرض‌وارتفاع انبارمی گیریم $xyz=۷۵۰۰۰$. اتلاف گرما متناسب است با

$$xy+۵xy+۱۰xz+۱۰yz=۶xy+۱۰xz+۱۰yz$$

(xy، مساحت کف یا سقف انبار است). جمله‌های این مجموع، حاصل‌ضربی ثابت دارند و، بنابراین، حداقل آن‌وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$۶xy=۱۰xz=۱۰yz \Rightarrow x=y=\frac{۵}{۳}z$$

C.۱۷ پاسخ: $\frac{abc}{27}$. در واقع، چون مجموع $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$ مقداری ثابت است، حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی $\frac{xyz}{abc}$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$، که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x=\frac{a}{3}$، $y=\frac{b}{3}$ و $z=\frac{c}{3}$ و، درنتیجه $xyz=\frac{abc}{27}$.

C.۱۸ پاسخ: بعدهای مکعب مستطیل با حجم ماکزیمم برابرند با $\frac{2a}{\sqrt{3}}$، $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ و $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. در واقع، مجموع جمله‌های $\frac{x^2}{a^2}$، $\frac{y^2}{b^2}$ و $\frac{z^2}{c^2}$ مقداری ثابت است و، بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \Rightarrow x=\frac{3a}{\sqrt{2}}, y=\frac{3b}{\sqrt{2}}, z=\frac{3c}{\sqrt{2}}$$

C.۱۹ پاسخ: مستطیل با مساحت ماکزیمم به‌طول $r\sqrt{2}$ و عرض $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ومساحت r^2 است. در واقع، اگر راس‌های مستطیل را $(\pm x, y)$ و $(\pm x, 0)$ بگیریم (x و y مقدارهایی مثبت و $x^2+y^2=r^2$)، بعدهای مستطیل برابر $2x$ و y می‌شوند و، بنابراین، باید حداکثر مقدار $2yx$ را پیدا کرد. r مقداری است ثابت، باتوجه به $x^2+y^2=r^2$، مقدار x^2y^2 وقتی ماکزیمم می‌شود که داشته باشیم $x^2=y^2$ یا $x=y$. دنبالهٔ محاسبه دشوار نیست.

C.۲۰ ضلع هریك ازمربع‌های گوشه‌ای را x می گیریم. دراین‌صورت، جعبهٔ مستطیل شکل‌حاصل قاعده‌ای مربع شکل به‌ضلع $30-2x$ وارتفاعی برابر x پیدا می کند. باید ماکزیمم $x(30-2x)^2$ را پیدا کنیم. این حجم را به‌صورت $2(2x)(15-x)(15-x)$ می‌نویسیم که، اگر ۲ را کنار بگذاریم، مجموع عامل‌های آن مقداری ثابت است. بنابراین، باید داشته

باشیم: $x - 15 = 2x$ یا $x = 5$.

۲۱.C. حجم استوانه، برابر $\pi r^2 h$ و مساحت کل آن $s = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ است. اگر از ضریب‌های ثابت صرف‌نظر کنیم، مساله به‌این‌جا منجر می‌شود که، با ثابت بودن $r^2 h$، مجموع $r^2 + rh$ را به‌حداقل ممکن برسانیم. داریم:

$$r^2 + rh = r^2 + \frac{1}{2}rh + \frac{1}{2}rh$$

جمله‌های این مجموع، حاصل‌ضرب ثابتی دارند:

$$r^2 . \frac{1}{2}rh . \frac{1}{2}rh = \frac{1}{4}r^4 h^2 = \frac{1}{4}(r^2 h)^2$$

بنابراین، باید داشته باشیم: $r^2 = \frac{1}{2}rh$ یا $r = 2h$.

۲۲.C. پاسخ: $h = r$. حجم $\pi r^2 h$ ثابت است و باید مساحت $\pi r^2 + 2\pi r h$ را می‌نیمم کنیم. با صرف‌نظر کردن از ضریب ثابت π داریم:

$$r^2 + 2rh = r^2 + rh + rh$$

جمله‌های این مجموع، حاصل‌ضربی ثابت‌دارند و، بنابراین، باید داشته‌باشیم:

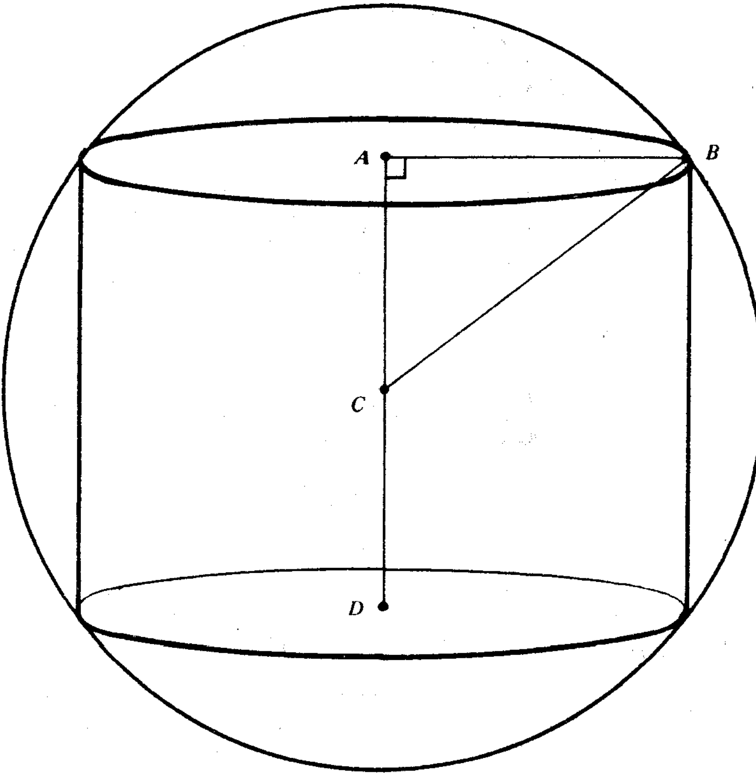
$$r^2 = rh \Rightarrow r = h$$

۲۳.C. پاسخ: $h = r\sqrt{2}$. شعاع کرهٔ مفروض‌را، به‌عنوان واحدطول انتخاب می‌کنیم. اگر مرکز دایره‌های دو قاعدهٔ استوانه را A و D بنامیم (شکل ۲۳.C)، آن‌وقت، نقطهٔ C مرکز کره، وسط پاره‌خط AD خواهدبود. B را نقطه‌ای‌دلخواه ازمحیط قاعدهٔ بالای استوانه بگیریم، روشن است‌که، درضمن، روی سطح کره قرار می‌گیرد داریم:

$$BC = 1 ,\quad AB = r ,\quad AC = \frac{h}{2} ,\quad r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

باید حجم $\pi r^2 h$ ماکزیمم شود. رابطهٔ (۱) را این‌طور می‌نویسیم:

$$2r^2 + 2r^2 + h^2 = 4$$



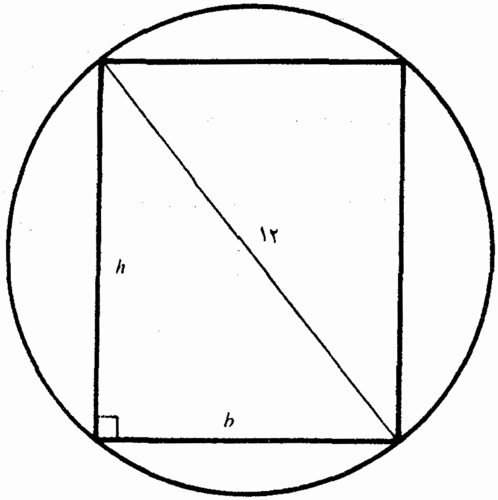
شکل ۲۳.c

حاصل‌ضرب جمله‌های مجموع سمت‌چپ این برابری مقداری ثابت است. ماکزیمم این حاصل‌ضرب، یعنی $۴r^۴h^۲$، با ماکزیمم $\pi r^۲h$ همراه است. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۲r^۲=h^۲ \Rightarrow h=r\sqrt{۲}$$

۲۴.C. پاسخ: $b=۴\sqrt{۳}$ و $h=۴\sqrt{۶}$. در شکل ۲۴.c می‌بینید. $b^۲+h^۲=۱۴۴$، که می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$۲b^۲+h^۲+h^۲=۲۸۸$$



شکل ۲۴۰c

مجموع سمت چپ این برابری، حاصل‌ضربی برابر $۲b^۲h^۴$ دارد که ماکزیمم آن، به معنای ماکزیمم $bh^۲$ است. باید داشته باشیم: $۲b^۲=h^۲$، که اگر این معادله‌را، همراه بامعادلهٔ $b^۲+h^۲=۱۴۴$ حل کنیم، به‌جواب‌می‌رسیم.

۲۵۰C. مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $(c \text{ ،} ۰)$ از هر نقطهٔ منحنی، برابر است با

$$x^۲+(y-c)^۲=x^۲+(x^۲-c)^۲=x^۴-(۲c-۱)x^۲+c^۲$$

مقدار ثابت $c^۲$ را کنار می‌گذاریم و به‌جست‌وجوی ماکزیمم عبارت $x^۴-(۲c-۱)x^۲$ می‌رویم. سه‌حالت درنظر می‌گیریم. درحالت $c>\frac{۱}{۲}$ داریم: $۲c-۱>۰$. دراین‌حالت، باتوجه به§۲.۲، باید $x^۲=\frac{۲c-۱}{۲}$ انتخاب کنیم. درحالت $c=\frac{۱}{۲}$، مساله منجر به ماکزیمم کردن $x^۴$ می‌شود و، بنابراین $x=۰$. در حالت $c<\frac{۱}{۲}$ داریم: $۲c-۱<۰$. دراین‌حالت، دو جملهٔ $x^۴$ و $-(۲c-۱)x^۲$، همیشه‌مثبت‌اند، به‌جز در $x=۰$. بنابراین،

دوباره به $x=0$ می‌رسیم.

به‌طورخلاصه، درحالت $c \leqslant \frac{1}{2}$، نزدیک‌ترین نقطهٔ منحنی به‌نقطهٔ $(0،c)$، مبداء مختصات، و در حالت $c > \frac{1}{2}$، نزدیک‌ترین نقطهٔ‌منحنی به‌نقطهٔ $(0،c)$، دو نقطهٔ $\left(\pm\sqrt{\frac{2c-1}{2}}\,,\ \frac{2c-1}{2}\right)$اند.

C۲۶۰. پاسخ: A، B و C را باید طوری انتخاب کرد که داشته باشیم: $OA=OB=OC$. مقدار ثابت مجموع طول‌یال‌ها را c می‌گیریم. باتوجه به‌نابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وهندسی، داریم:

$$c=x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}\geqslant$$

$$\geqslant x+y+z+\sqrt{2xy}+\sqrt{2xz}+\sqrt{2yz}\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{xyz}=$$

$$=(3+3\sqrt{2})\sqrt[3]{xyz}$$

و برابری تنها به‌ازای $x=y=z$ برقرار است.

C۲۷۰. پاسخ: باید H و K را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم: $HQ=KQ$ و $HK=c$ یکی‌از راه‌ها، برای‌به‌دست آوردن این ساختمان، این است‌که روی پاره‌خط HK به‌طول c، کمان درخور زاویهٔ PQR را بسازیم. برای هرنقطهٔ B از این‌کمان، زاویهٔ HBK برابر زاویهٔ HQK خواهد بود. مثلث HBK وقتی بیشترین مساحت را داردکه نقطهٔ B، وسط کمان باشد.

C۲۸۰. پاسخ: اگر A' و B' را پای عمودهای وارد از A و B برخط راست PQ فرض‌کنیم، باید نقطهٔ K را وسط پاره‌خط $A'B'$ انتخاب‌کرد. برای اثبات، طول پاره‌خطهای AA'، BB' و $A'B'$ را، به‌ترتیب a،b و c می‌گیریم. اگر طول پاره‌خط $A'K$ برابر x باشد، طول پاره‌خط KB' برابر $c-x$ می‌شود و باید می‌نیمم عبارت زیرا را پیدا کنیم:

$$AK^2+KB^2=a^2+x^2+b^2+(c-x)^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2(x^2-cx)$$

و روشن است که، این می‌نیمم، به‌ازای $x=\frac{c}{2}$ به‌دست می‌آید.

۲۹.C پاسخ: I. نقطه P منطبق بر B است؛ II. نقطهٔ P منطبق بر هرنقطهٔ دلخواه از پاره‌خط BC است؛ III. درحالت فردبودن تعدادنقطه‌ها، نقطهٔ P منطبق برنقطهٔ میانی است، درحالت زوج‌بودن تعداد نقطه‌ها، نقطهٔ P منطبق بر هرنقطهٔ دلخواه از پاره‌خط میانی است.

برای اثبات، نقطهٔ متحرکی را درنظر بگیرید که ازنقطهٔ انتهایی‌سمت چپ آغاز به‌حرکت می‌کند و به طرف نقطهٔ انتهایی سمت راست می‌رود: I. وقتی P به‌سمت راست حرکت می‌کند، مجموع $PA+PB+PC$ مرتباً کوچکتر می‌شود تا زمانی‌که P به B برسد؛ ازاین‌جا به‌بعد، دوباره این مجموع رو به‌افزایش می‌گذارد. II. تا رسیدن به B، مجموع $PA+PB+PC+PD$ کاهش می‌یابد، سپس، در طول پاره‌خط BC، این مجموع ثابت می‌ماند و وقتی نقطهٔ P، فاصله از C تا D را می‌پیماید، مجموع مفروض روبه‌افزایش می‌نهد. برای حالت III هم، می‌توان ازهمین تجزیه وتحلیل استفاده کرد.

۳۰.C پاسخ $\sqrt{620}$ فوت. پاسخ، بادوبار استفاده ازقضیهٔ فیثاغورث به‌دست می‌آید.

۳۱.C پاسخ: ۳۰ فوت. فرض کنید دیوار 18×10 درطول بعد ۱۸ فوتی‌خود به‌کف اطاق‌لولا شده‌باشد. اگر این‌دیوار را روی زمین‌بخوابانیم، به‌نحوی‌که درکنارکف اطاق قرارگیرد و، روی هم، مستطیلی 18×24 تشکیل دهند. اکنون روشن است‌که‌کوتاه‌ترین مسیر مورچه، از طریق قطر این مستطیل انجام می‌گیرد‌که طولی برابر ۳۰ فوت دارد. همین‌نتیجه را می‌توانستیم با خواباندن دیوار دیگر اطاق و به‌وجود آوردن مستطیل 28×14 و یا با چرخاندن سقف اطاق به‌نحوی‌که روی دیوار طرفی‌قرار گیرد ومستطیل 10×32 را تشکیل دهد، به‌دست آوریم.

۳۲.C پاسخ: اگر $n=2k$ عددی زوج باشد، k نقطه را دریک انتها و k نقطهٔ دیگر را درانتهای دیگر پاره‌خط قرارمی‌دهیم؛ وقتی $n=2k+1$ عددی فرد باشد، k نقطه را دریک انتها، k نقطهٔ دیگر را در انتهای دیگر و یك نقطهٔ باقی‌مانده را برنقطهٔ دلخواهی از پاره‌خط قرار می‌دهیم.

برای اثبات، طول پاره‌خط را به‌عنوان واحد طول انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت، می‌توانیم دونقطهٔ انتهائی پاره‌خط را با مختص‌های ۰ و ۱ نشان دهیم. مختص‌های n نقطه را به‌ترتیب، a_1، a_2، ...، a_n می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant 1$$

بایدمی‌نیمم $\sum(a_j-a_i)$ را پیدا کرد، درآن، i و j عددهای درستی‌هستند که درنابرابری‌های $1 \leqslant i < j \leqslant n$ صدق می‌کنند. این مجموع را،می‌توان به‌این‌صورت تبدیل کرد:

$$\sum(a_j-a_i)=(n-1)a_n+(n-3)a_{n-1}+(n-5)a_{n-2}+\ldots+$$

$$+(3-n)a_2+(1-n)a_1=\sum_{r=1}^{n}(2r-n-1)a_r$$

درحالتی‌که n زوج باشد، تعداد جمله‌هایی از a_r که ضریب مثبت دارند، برابر است باتعداد جمله‌هایی از a_r که ضریب منفی دارند وماکزیمم مقدار آن، با درنظر گرفتن $a_r=0$ برای $r=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$، و $a_r=1$ برای بقیهٔ rها به‌دست می‌آید. درحالتی‌که n، عددی فرد باشد ($n=2k+1$)، جملهٔ a_r درمجموع بالا، به‌ازای $r=\frac{n+1}{2}$، ضریبی برابر صفر دارد و، بنابراین، این نقطه را می‌توان درهرنقطهٔ دلخواهی بین ۰ و ۱ قرار داد.

۳۳.C پاسخ: جواب منفی‌است. به‌عنوان مثال نقض، می‌توانیدفرض کنید: $a=200$، $b=c=101$ و $a'=b'=c'=100$. ولی، اگر T، مثلثی با زاویهٔ منفرجه نباشد: $S_{T'}<S_T$. به زبان دیگر، اگر T، مثلثی با

زاویهٔ منفرجه باشد، می‌توان مثلثی با ضلع‌های کوچکتر پیدا کرد، که‌مساحتی بیشتر داشته باشد.

برای اثبات، ابتدا زاویه‌های مثلث T را حاده یا قائمه می‌گیریم و آن‌ها را α، β و γ می‌نامیم. اگر زاویه‌های مثلث T' را α'، β' و γ' فرض کنیم، چون مجموع زاویه‌های مثلث مقداری ثابت است، دست‌کم‌یکی از زاویه‌های مثلث T' از زاویهٔ نظیرخود درمثلث T بزرگتر نیست. بدون این‌که به‌کلی‌بودن مطلب لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم: $\alpha' \leqslant \alpha$ داریم:

$$S_{T'} = \frac{1}{2}b'c'\sin\alpha' < \frac{1}{2}bc\sin\alpha = S_T$$

اکنون، یکی از زاویه‌های مثلث T را منفرجه‌می‌گیریم، مثلاً $\alpha > 90^\circ$. دراین‌صورت $a^2 > b^2 + c^2$ ومثلث قائم‌الزاویهٔ باضلع‌های b، c و $\sqrt{b^2+c^2}$ مساحتی بیشتر ازمساحت T دارد (قضیهٔ ۲.۳-C را ببینید). اگر T' را با ضلع‌های rb، rc و $r\sqrt{b^2+c^2}$ درنظر بگیریم، به‌شرطی‌که r عدد مثبتی کوچکتر از واحد، ولی خیلی نزدیك به‌واحد باشد، آن‌وقت $S_{T'} > S_T$.

C۳۴. پاسخ: مستطیل 8×4؛ $\frac{128\sqrt{12}}{9}$.

راس‌های مستطیل را درنقطه‌های $(\pm x, 0)$ و $(\pm x, 12 - x^2)$ می‌گیریم. دراین‌صورت، بایدماکزیمم $2x(12 - x^2)$ را پیدا کنیم. مجذور این‌عبارت‌را به‌صورت $2(2x^2)(12 - x^2)(12 - x^2)$ می‌نویسیم. باتوجه به‌قضیهٔ ۶.۲-a، باید داشته باشیم: $2x^2 = 12 - x^2$، یعنی $x = 2$.

به‌همین‌ترتیب، در مورد ذوزنقه، اگر دو راس بالائی را به‌مختصات $(\pm x, \sqrt{12 - x^2})$ بگیریم، مساحت آن چنین می‌شود:

$$(12 - x^2)(\sqrt{12} + x) = \frac{1}{2}(2\sqrt{12} - 2x)(\sqrt{12} + x)(\sqrt{12} + x)$$

که برای ماکزیمم شدن‌آن بایدمعادله $2\sqrt{12} - 2x = \sqrt{12} + x$ را حل کنیم.

C ۳۵. پاسخ: بـه نسبت $\sqrt{۲}$. برای اثبات، مجذور سطح جانبی را محاسبه می‌کنیم.

$$S^۲=\pi^۲r^۲(r^۲+h^۲)=\pi^۲\left(r^۴+\frac{۹V^۲}{\pi^۲r^۲}\right)=$$

$$=\pi^۲\left(r^۴+\frac{۹V^۲}{۲\pi^۲r^۲}+\frac{۹V^۲}{۲\pi^۲r^۲}\right)$$

جمله‌های مجموع داخل پرانتز، حاصل‌ضربی ثابت دارند، بنابراین، وقتی S می‌نیمم است که داشته باشیم:

$$r^۴=\frac{۹V^۲}{۲\pi^۲r^۲}\Rightarrow ۲\pi^۲r^۶=۹V^۲=\pi^۲r^۴h^۲\Rightarrow h=r\sqrt{۲}$$

C ۳۷. $a<b$ می‌گیریم. روشن است که حداقل محیط را باید در بین ذوزنقه‌هایی جست‌وجو کرد که، درآن‌ها، عمودهای‌وارد از دو انتهای‌قاعدهٔ کوچکتر برقاعدهٔ بزرگتر، در داخل ذوزنقه قرار گیرند. فرض می‌کنیم. پای این عمودها، قاعـدهٔ b را به سه پاره‌خط به‌طول‌هـای x، a و $b-a-x$ تقسیم کنند. دراین‌صورت، محیط ذوزنقه، چنین می‌شود:

$$a+b+\sqrt{x^۲+h^۲}+\sqrt{(b-a-x)^۲+h^۲}$$

$a+b$ ثـابت است، اگر آن را کنار بگذاریم، بـایـد می‌نیمم مجموع دو رادیکال را پیدا کنیم. و این، همان مسالهٔ C ۳۶. (درمتن) است که‌دراین‌جا

$$a_۱=x,\ b_۱=h,\ a_۲=b-a-x,\ b_۲=h,\ a_۳=b_۳=۰$$

بنابراین، حداقل محیط، برابر است با

$$a+b+\sqrt{(b-a)^۲+(۲h)^۲}$$

و این حداقل وقتی به‌دست می‌آیدکه x و h، متناسب بـا $b-a-x$ و h باشند، یعنی‌ $x=b-a-x$ یا $x=\frac{b-a}{۲}$؛ کـه متـناظـر بـا ذوزنـقـهٔ متساوی‌الساقین است.

C.۳۸. پاسخ: $x=\dfrac{bc-ad}{a+c}$. با توجه به مسالهٔ C.۳۶ و بافرض $a_3=b_3=0$، خواهیم داشت:

$$\sqrt{a^2+(b-x)^2}+\sqrt{c^2+(d+x)^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

وعلامت‌برابری تنها وقتی‌برقرار است که a و $b-x$، متناسب با c و $d+x$ باشند، که ازآن‌جا جواب به‌دست‌می‌آید. [کسر $\dfrac{bc-ad}{a+c}$ بسته به‌مقدارهای a، b، c و d، می‌تواند مثبت، منفی یا صفر شود. ولی $b-x$ و $d+x$ همیشه مثبت‌اند، زیرا

$$b-x=\frac{a(b+d)}{a+c}\ ,\ d+x=\frac{c(b+d)}{a+c}$$

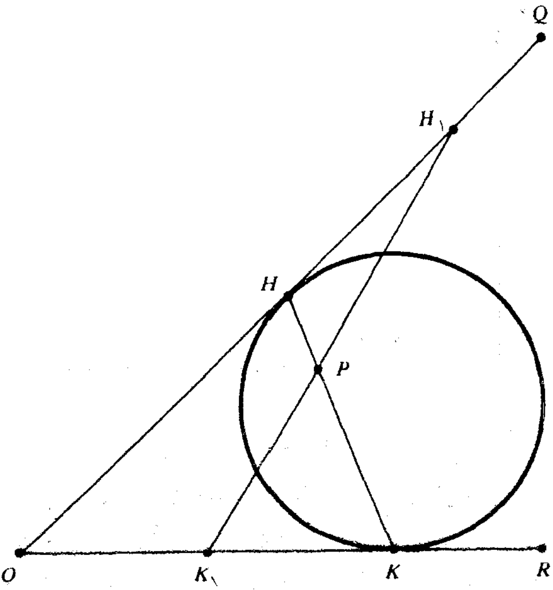
وبنابراین، تناسب موردنظر برقرار است.]

C.۳۹. هرنقطهٔ مانند Q واقع در داخل یا روی محیط چندضلعی، می‌تواند جواب‌مساله باشد، زیرا اگر چندضلعی منتظم دارای nضلع به‌طول a باشد، به‌شرطی‌که فاصله‌های نقطه Q را تا ضلع‌ها d_1، d_2، ...،d_n فرض کنیم، برابر مساحت چندضلعی خواهیم داشت

$$\frac{ad_1}{2}+\frac{ad_2}{2}+\ldots+\frac{ad_n}{2}=\frac{a}{2}(d_1+d_2+\ldots+d_n)$$

یعنی‌مجموع $d_1+d_2+\ldots+d_n$ برای هرنقطهٔ دلخواه Q، واقع درداخل یا روی محیط چندضلعی منتظم، مقدار ثابتی است.

C.۴۰. دایره‌ای را درنظر می‌گیریم که به‌ترتیب بر OQ و OR، در نقطه‌های HوK، مماس باشد (شکل C.۴۰) و نقطه‌های H، K و P روی یك خط راست قرارگیرند. [برای پیدا کردن H و K، کافی است دایرهٔ دلخواهی مماس برOQ و OR رسم‌کنیم؛ اگر نقطه‌های تماس را به‌هم‌وصل کنیم، وتری از دایره به‌دست می‌آیدکه موازی HK است.] اکنون، اگر خط راست دیگری از P بگذارنیم‌که OQ و OR را در H_1 و K_1 قطع‌کند،



شکل ۴۰.c

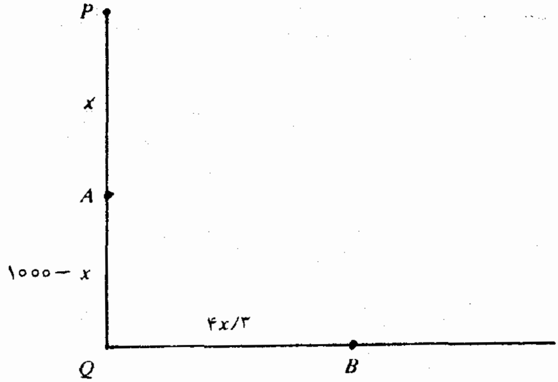
روشن است که $PH.PK<PH_1.PK_1$ (باتوجه به‌این‌قضیه که اگردو وتر HK و AB یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند، داریم: $PH.PK=PA.PB$).

۴۱.C پاسخ: ۸۰۰ متر. وقتی دوچرخه‌سوار A، مسافت x را طی کند، دوچرخه‌سوار B، مسافت $\frac{۴x}{۳}$ را می‌پیماید. فاصلهٔ بین A و B از رابطه زیر مشخص می‌شود (شکل ۴۱.c):

$$d^۲=(۱۰۰۰-x)^۲+\frac{۱۶x^۲}{۹}=۱۰^۶-۲۰۰۰x+\frac{۲۵}{۹}x^۲$$

که بنابرقضیهٔ ۲.۲-a، وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم: $x=۳۶۰$.

۴۲.C چهارضلعی $ABCD$ را (باهمین ردیف راس‌ها) درنظرمی گیریم. حداکثر مساحت این چهارضلعی برابر است با $\frac{۱}{۲}AC.BD$، زیرا مجموع ارتفاع‌های از راس‌های B و D برقاعدهٔ AC ازمثلث‌های ABC و ADC،



شکل ۴۱۰c

حداکثر برابر است با BD (این استدلال، برای چهارضلعی مقعر هم درست است، به‌شرطی که، درآن، راس C در داخل مثلث ABD واقع باشد). اگر قطر چهارضلعی برابر واحد باشد، آن‌گاه $AC \leqslant 1$ و $BD \leqslant 1$. دوپاره‌خط عمود برهم و هریك به‌طول واحد، برای AC و BD درنظر می‌گیریم، دراین‌صورت مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود و درحالتی که AC و BD یکدیگر را نصف‌نکرده‌باشند، مربع نیست (البته، باید قطرها را چنان گرفت که هرضلع چهارضلعی، حداکثر برابر واحد باشد).

D۰۱۰ (a) بله. اگر از مرکز دایرهٔ محیطی به‌راس‌های چندضلعی وصل کنیم، مثلث‌هایی به‌دست می‌آید، که همه با هم برابرند. ازهمین‌جا، برابری زاویه‌های چندضلعی نتیجه می‌شود.

(b) وقتی تعداد ضلع‌های چند ضلعی، عددی فرد باشد، جواب مثبت است، ولی درحالت زوج بودن تعداد ضلع‌ها، ممکن است چندضلعی منتظم نباشد، مثل لوزی.

مرکز دایرهٔ محاطی چندضلعی را به‌راس‌ها و به‌نقطه‌های تماس ضلع‌ها با دایره وصل می‌کنیم، $2n$ مثلث به‌دست می‌آید که nتای آن‌ها باهم و nتای

دیگر باهم برابرند. بنابراین، زاویه‌های داخلی چندضلعی به‌صورت a، b، a، b، a، b، ... درمی‌آیند. ازهمین‌جا نتیجه می‌شود که اگر n عددی فرد باشد. همهٔ زاویه‌ها باهم برابرند.

۲۰.D (a) اگر n فرد باشد، چندضلعی منتظم است، ولی در حالت زوج بودنn، ممکن‌است چندضلعی منتظم نباشد، مثل مستطیلی که در دایره محاط باشد. راس‌های‌چندضلعی را $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n می‌گیریم. برای $n=۳$، مثلث $P_۱P_۲P_۳$ زاویه‌هایی برابر دارد و، بنابراین، متساوی‌الاضلاع است: برای $n>۳$، پاره‌خطهای $P_۱P_۳$ و $P_۲P_۴$ ازنقطه‌های $P_۲$ و $P_۳$ به‌زاویه‌های برابر دیده می‌شوند؛ بنابراین $P_۱P_۳ = P_۲P_۴$. به‌این‌ترتیب، مثلث‌های $P_۱P_۲P_۳$ و $P_۴P_۳P_۲$ باهم برابرند (در دوضلع و زاویه روبه‌رو به‌ضلع بزرگتر). پس $P_۱P_۲ = P_۳P_۴$ و به‌همین ترتیب $P_۲P_۳ = P_۴P_۵$، $P_۳P_۴ = P_۵P_۶$ و غیره. به‌این‌ترتیب، ضلع‌ها، یك‌درمیان باهم برابرند، درنتیجه، اگر n فرد باشد، همهٔ ضلع‌ها باهم برابر می‌شوند، درحالی‌که اگر n زوج باشد، ممکن است همهٔ ضلع‌ها باهم برابر نباشند.

(b) درهرحال چندضلعی منتظم است. اگر ازمرکز دایرهٔ محاطی، به راس‌ها و نقطه‌های تماس ضلع‌ها با دایره وصل کنیم، $۲n$ مثلث برابر به‌دست می‌آید.

۳۰.D اگرکمانی به‌طول C وغیر ازکمان دایره، که A و B را به‌هم وصل کرده است، مساحت بیشتری را محصورکند، آن‌وقت، این کمان، همراه با «باقی‌ماندهٔ دایره» [راهنمای حل را درپایان صورت مساله ببینید]، قضیهٔ هم‌پیرامونی را نقض می‌کند.

۴۰.D پاسخ: $\theta = ۲$ نسبت هم‌پیرامونی، چنین است:

$$\frac{۴\pi A}{L^۲} = \frac{۲\pi r^۲\theta}{(۲r+r\theta)^۲} = \frac{۲\pi\theta}{(\theta+۲)^۲}$$

به‌جای این که این‌مقدار را ماکزیمم کنیم، عکس آن را می‌نیمم می‌کنیم (از ضریب ثابت ۲π می‌گذریم). داریم

$$\frac{(\theta+۲)^۲}{\theta}=\theta+\frac{۴}{\theta}+۴$$

که بنابرمسالهٔ ۲ از ۲.۲§، حداقل مقدارآن به‌ازای $\theta=۲$ به‌دست‌می‌آید.

D‧۶۰. I. بله. باید طول قطر AC از متوازی‌الاضلاع، برابرباشد با

$$AC=(\sqrt{۲}-۱)(AB+BC)$$

II. نه، چنین مستطیلی وجود ندارد.

E‧۱۰. نابرابری اول ازنتیجهٔ (۱) در ۴.۵ § به‌دست می‌آید. اگر در این نابرابری α و β را، به‌ترتیب، به $۹۰^\circ-\alpha$ و $۹۰^\circ-\beta$ تبدیل کنید، به‌نابرابری دوم می‌رسید.

E‧۲۰. درمثلثی که هر سه زاویه آن حاده باشد، بنابرقضیه a-۴.۵، ماکزیمم مجموع کسینوس‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ است. ثابت می‌کنیم، اگر یکی از زاویه‌های مثلث منفرجه یا قائمه باشد، آن‌وقت، مجموع مفروض، از $\frac{۳}{۲}$ کوچکتر است. هرمثلثی از این گونه، دو زاویهٔ حاده دارد؛ اگرآن‌ها را αوβ بنامیم، داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=$$

$$=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+$$

$$+\sin\alpha\sin\beta=۱+\sin\alpha\sin\beta-(۱-\cos\alpha)(۱-\cos\beta)<۱+\sin\alpha\sin\beta$$

باتوجه به‌مسالهٔ قبلی $\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{۱}{۲}$، زیرا α و β مجموعی برابر یا کوچکتر از ۹۰ درجه دارند.

برای‌این‌که ثابت کنیم، بزرگترین کران پایین برابر واحد است، توجه می‌کنیم، برای $\gamma=۹۰^\circ$، α و $\beta=۹۰^\circ-\alpha$، هرقدر زاویهٔ α راکوچکتر بگیریم، مجموع کسینوس‌های سه‌زاویه، به‌واحد نزدیکتر می‌شود. ازطرف

دیگر، برای هـر زاویهٔ حادهٔ α داریـم: $\sin\alpha > \sin^2\alpha$ و $\cos\alpha > \cos^2\alpha$،
بنابراین $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$، یعنی

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha > 1 - \cos\alpha \\ \sin\beta > 1 - \cos\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha\sin\beta > (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)$$

از این نـابرابـری وتـجزیـه وتـحلیل ابتـدای مسالـه روشن میشودکـه $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1$.

۴.E پـاسخ: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ و $\frac{1}{8}$. اولی، نتیجهای است ازمسالهٔ $1.E$ وقضیهٔ b-۳.۵ بهازای $n = 3$. برای حاصـلضرب کسینوسها، توجه میکنیم، در حالتیکه یکی از زاویهها برابر ۹۰ درجه یا بیشتر از آن باشد، حاصلضرب کسینوسها برابر صفر یا مقداریمنفی میشود؛ درحالتی همکه هرسه زاویه حاده باشند، میتوان دوباره ازمسالهٔ ۱.E وقضیه b — ۳.۵ بهازای $n = 3$ استفاده کرد.

۵.E پاسخ: $2\sqrt{3}$. راهنمائی: از نـابرابری (۲) در § ۴.۵ و قضیهٔ a-۳.۵ برای $n = 3$ استفاده کنید.

۶.E درحالت $\alpha + \beta = 90^\circ$ داریـم $tg\beta = cotg\alpha$ و، روشن است که نابرابری به برابری تبدیل میشود. بـرای حالت $\alpha + \beta = 90^\circ$ از دو اتحاد زیر استفاده می کنیم:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta},\quad tg(\alpha+\beta) = \frac{2tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

چون داریـم: $tg\alpha + tg\beta \geqslant 2tg\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$، بنابراین

$$1 - tg\alpha tg\beta \geqslant 1 - tg^2\frac{2+\beta}{2} \Rightarrow tg\alpha tg\beta \leqslant tg^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

درحالت $\alpha+\beta>90^\circ$، داریم: $tg(\alpha+\beta)<0$ و نابرابری‌ها در جهت عکس قرار می‌گیرند.

E۰۷. باتوجه به‌مسالهٔ قبل داریم:

$$tg\frac{\alpha}{2}.tg\frac{\beta}{2}\leqslant tg^2\frac{\alpha+\beta}{4}\ ;\ tg\frac{\gamma}{2}.tg30^\circ\leqslant tg^2\frac{\gamma+60^\circ}{4}$$

اگر دو طرف این نابرابری را درهم ضرب کنیم وتوجه داشته باشیم که

$$tg\frac{\alpha+\beta}{4}.tg\frac{\gamma+60^\circ}{4}\leqslant tg^2\frac{\alpha+\beta+\gamma+60^\circ}{8}=tg^2 20^\circ=\frac{1}{3}$$

به‌سادگی به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

برای نابرابری‌های بعدی، ابتدا سه زاویه را حاده می‌گیریم وفرض می‌کنیم: $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma<90^\circ$. بنابراین $\gamma\geqslant60^\circ$ و $\alpha+\beta>90^\circ$، و با توجه به‌مسالهٔ قبل داریم:

$$tg\alpha tg\beta\geqslant tg^2\frac{\alpha+\beta}{2},\ \ tg\gamma tg60^\circ\geqslant tg^2\frac{\gamma+60^\circ}{2},$$

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\gamma+60^\circ}{2}\geqslant tg^2\frac{\alpha+\beta+\gamma+60^\circ}{4}=tg^2 60^\circ=3$$

و از آن‌جا، نابرابری‌های مطلوب، به‌دست می‌آیند (قضیهٔ ۴.۵-a).

E۰۸. پاسخ: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. کافی است مساله را درحالت $x+y<180^\circ$ حل کنیم، زیرا درغیراین‌صورت، $sin(x+y)$ منفی یا برابر صفر می‌شود.

باتوجه به‌مسالهٔ E.۱ داریم: $sin x sin y\leqslant 2 sin^2\frac{x+y}{2}$. بنابراین‌ماکزیمم، تنها به‌ازای $y=x$ به‌دست می‌آید. مساله، منجر به‌این می‌شودکه ماکزیمم $sin^2 x sin 2x$ را باشرط $0<x<90^\circ$، پیدا کنیم داریم:

$$(sin^۲ x sin ۲x)^۲ = (۲ sin^۳ x cos x)^۲ = ۴ sin^۶ x cos^۲ x =$$

$$= \frac{۴}{۳}(sin^۲ x)(sin^۲ x)(sin^۲ x)(۳ - ۳sin^۲ x)$$

اگر از $\frac{۴}{۳}$ بگذریم، عامل‌های ضرب، مجموعی ثابت دارند و، بنابراین، ماکزیمم برای $sin^۲ x = ۳ - ۳sin^۲ x$ به‌دست می‌آید.

E.۹۰. پاسخ: برای هر دو حالت، نقطهٔ R بر کمان بزرگتر PQ و در وسط آن است. برای ماکزیمم کردن مساحت اگر PQ را قاعدهٔ مثلث فرض کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که باید ارتفاع مثلث، حداکثر مقدار ممکن باشد. درمورد محیط مثلث، توجه می‌کنیم، اگر $R_۱$ بر کمان بزرگتر RQ باشد، محیط مثلث $PQR_۱$ برابر $۲r(sin\alpha + sin\beta + sin\gamma)$ می‌شود که، درآن، ۲α، ۲β و ۲γ به‌ترتیب، زاویه‌های روبه‌روبه‌ضلع‌های PQ، QR و RP درمرکز دایره‌اند. α مقداری است ثابت و، باتوجه به‌قضیهٔ a-۲.۵ معلوم می‌شود که برای ماکزیمم بودن محیط، باید داشته باشیم: $\beta = \gamma$.

E.۱۰۰. پاسخ: خود حکم درست است، ولی عکس آن درست نیست. باتوجه به‌قانون سینوس‌ها درمثلث، داریم:

$$a = R sin\alpha ,\quad b = R sin\beta ,\quad c = R sin\gamma$$

می‌بینیم که نابرابری $a < \frac{b+c}{۲}$ منجر به نابرابری $sin\alpha < \frac{sin\beta + sin\gamma}{۲}$ می‌شود که، باتوجه به‌قضیهٔ a-۲.۵ به‌نابرابری $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{۲}$ می‌رسد. برای عکس حکم، می‌توان مثال نقض آورد: مثلثی که ضلع‌هایی برابر $\sqrt{۳}$، ۱ و ۲ داشته باشد، زاویه‌هایی برابر ۶۰°، ۳۰° و ۹۰° خواهد داشت و می‌بینیم که $\frac{۱+۲}{۲} > \sqrt{۳}$. به‌طور کلی، درمثلثی که درآن $\alpha < ۶۰^\circ$، $\beta > ۳۰^\circ$ و $\gamma = ۹۰^\circ$ باشد، نابرابری $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{۲}$ برقرار است، درحالی که نابرابری

$a<\frac{b+c}{۲}$ برقرار نیست.

E.۱۱۰ پاسخ: $\sqrt{۲}$.

E.۱۲۰ پاسخ: ۵. با فرض $x=cos\theta$، مساله منجر به پیدا کردن ماکزیمم $۴cos\theta+۳sin\theta$ می‌شود.

E.۱۳۰ پاسخ: $\sqrt{۵۱}$. اگر فرض کنیم $cos\theta=\frac{x}{\sqrt{۳}}$ داریم:

$$۴x+\sqrt{۳-x^{۲}}=۴\sqrt{۳}\left(\frac{x}{\sqrt{۳}}\right)+\sqrt{۳}.\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۳}}=۴\sqrt{۳}cos\theta+\sqrt{۳}sin\theta$$

E.۱۴۰ پاسخ: ۹. از بخش دوم قضیهٔ ۵.۵-a و با بیان آن به‌صورت (۳) استفاده می‌کنیم. داریم:

$$۵\sqrt{۹+۴x^{۲}}-۸x=۸\left(\frac{۵}{۴}\sqrt{\frac{۹}{۴}+x^{۲}}-x\right)$$

و اگر قضیه را برای $\alpha=\frac{۵}{۴}$ و $c=\frac{۱}{۲}$ به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{c}{\sqrt{a^{۲}-۱}}=۲$$

E.۱۵۰ پاسخ: $\max(a،b)$. عبارت را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$a\cos^{۲}\theta+b\sin^{۲}\theta=a(۱-\sin^{۲}\theta)+b\sin^{۲}\theta=a+(b-\alpha)\sin^{۲}\theta$$

وچون $۱\geqslant\sin^{۲}\theta\geqslant ۰$، به‌سادگی به‌جواب می‌رسیم.

E.۱۶۰ پاسخ: (a)$\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$؛ (b) $\frac{۱۷}{۱۸\sqrt{۶}}$؛ (c) $\frac{۱۰}{۳}$. حل: (a)داریم:

$$(\sin\theta\sin ۲\theta)^{۲}=[۲\cos\theta(۱-\cos^{۲}\theta)]^{۲}=$$
$$=۲(۲\cos^{۲}\theta)(۱-\cos^{۲}\theta)(۱-\cos^{۲}\theta)$$

حاصل‌ضربی با مجموع ثابت بدست می‌آید و، بنابراین، باید داشته باشیم $۲\cos^{۲}\theta=(۱-\cos^{۲}\theta)$.

(b)اگر $\sin\theta\cos ۲\theta$ را به‌صورت $\sin\theta(۱-۲\sin^{۲}\theta)$ بنویسیم، می‌توان

مثل حالت قبلی عمل کرد.

(c) اگر $۲cos\theta+۳sin^{۲}\theta$ را به‌صورت $۳+۲cos\theta-۳cos^{۲}\theta$ بنویسیم، باید $۳+۲x-۳x^{۲}$ را ماکزیمم کنیم که به‌ازای $x=\frac{۱}{۳}$ به‌دست می‌آید.

E·۱۷· باتوجه به‌اتحاد $tg\theta.cotg\theta=۱$، باید می‌نیمم $x+\frac{۴}{x}$را پیدا کنیم.

E·۱۸· داریم: $sin\theta.cosec\theta=۱$. بنابراین، برای عبارت اول باید می‌نیمم $۹+\frac{۱}{x}$ را پیدا کنیم که به‌ازای $x=\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید. برای عبارت دوم، باید می‌نیمم $x+\frac{۹}{x}$ را برای $۰\leqslant x\leqslant ۱$ پیدا کنیم که به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید (مسالهٔ B·۷ را ببینید).

F·۱۰· درشکل a-۵·۶، مساحت مثلث CPQ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}CP.CQ.sin\theta=\frac{۱}{۲}sin\theta$$

و چون مساحت قطاع CPQ برابر $\frac{۱}{۲}\theta$ است، به‌سادگی نابرابری (I) به‌دست می‌آید. برای‌اثبات (II) توجه می کنیم که نابرابری $cos\theta>۱-\theta$، برای $\frac{\pi}{۲}>\theta>۱$ روشن است، زیرا دراین حالت $cos\theta$ مثبت و $۱-\theta$ منفی است. درحالت $۰<\theta\leqslant ۱$ از برهان خلف استفاده می کنیم. اگرداشته باشیم: $cos\theta\leqslant ۱-\theta$، می‌توانیم بنویسیم:

$$۱=sin^{۲}\theta+cos^{۲}\theta<\theta^{۲}+(۱-\theta)^{۲}=۱-۲\theta+۲\theta^{۲}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\theta<\theta^{۲}$ که شرط $۰<\theta\leqslant ۱$ را نقض می کند.

F·۲۰· پاسخ: نیم‌دایره را باید به‌سه‌بخش برابر تقسیم کرد، به‌نحوی که اگرچهارضلعی را $PQRS$ بگیریم (P و S دو انتهای قطر نیم‌دایره‌اند)، وترهای PQ، QR و RS از مرکز دایره، به‌زاویهٔ ۶۰ درجه دیده شوند.

برای اثبات، فرض می‌کنیم سه‌ضلع چهارضلعی (به‌جز PS)، از مرکز دایره، به‌زاویه‌های α، β و γ دیده شوند ($\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$).

مساحت چهارضلعی، برابر $\frac{۱}{۲}r^۲(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ می‌شود و این‌عبارت وقتی ماکزیمم می‌شود که داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma$.

۳۰۴. پاسخ: $\sqrt{۲}$، $\frac{۱}{۲}$ و ۵. چون $x^۲+y^۲$ مقداری ثابت است، $x^۲y^۲$، وهمراه با آن xy وقتی ماکزیمم می‌شود که $x^۲=y^۲$ یا $x=y$ باشد. از طرف دیگر داریم:

$$(x+y)^۲=x^۲+۲xy+y^۲=۱+۲xy$$

بنابراین، ماکزیمم $x+y$ هم، همراه با ماکزیمم xy به‌دست می‌آید.

برای پیدا کردن ماکزیمم $x+y$، به‌طریق دیگری هم می‌توان‌عمل کرد. $x+y=c$ نمایندهٔ خط‌های راست موازی، به‌ازای مقداری مختلف c است. بنابراین، بایدبزرگترین‌مقدار c را که‌به‌ازای‌آن‌خط‌راست $x+y=c$ با دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ نقطهٔ مشترکی دارد، پیدا کنیم. جواب روشن است. c مقداری‌است‌که، به‌ازای‌آن، خط‌راست $x+y=c$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ مماس باشد، که درنتیجه به‌دست می‌آید $c=\sqrt{۲}$.

باهمین‌روش، می‌توان ماکزیمم $۳x+۴y$ را به‌ازای نقطه‌های واقع بر محیط دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ به‌دست آورد. باید c را طوری پیدا کنیم که خط‌راست $۲x+۳y=c$ بر دایره مماس‌باشد. ضریب‌زاویهٔ خط‌راست‌برابر $-\frac{۳}{۴}$ است. بنابراین خط راست عمود براین‌خط که از مرکز دایره بگذرد با ضریب زاویهٔ $\frac{۴}{۳}$ است ومعادلهٔ آن به‌صورت $۴x-۳y=۰$ درمی‌آید. این خط راست‌دایره را درنقطهٔ $\left(\frac{۴}{۵},\frac{۳}{۵}\right)$ قطع می‌کندکه نقطهٔ تماس خط راست $۳x+۴y=c$ با دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ است. اگر مختصات نقطهٔ تماس‌را،

به‌جای x و y، در $۳x+۴y=c$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$c=\frac{۹}{۵}+\frac{۱۶}{۵}=۵$$

یعنی حداکثر مقدار $۳x+۳y$، باشرط $x^۲+y^۲=۱$، برابر است با ۵.

۴۰.F اگر n عددی زوج باشد، $n=۲k$، می‌توانیم در هریک از دو نقطهٔ $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$، درست k نقطه قرار دهیم. اگر n فرد باشد، $n=۲k+۱$، درنقطهٔ $(۱,۰)$، k نقطه، درنقطهٔ $(-۱,۰)$، $(k-۱)$ نقطه و درهریك از نقطه‌های $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ و $\left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$، يك نقطه‌قرار می‌دهیم. روش‌های دیگری هم، برای قراردادن نقطه‌ها وجود دارد؛ مثلاً با درنظرگرفتن n نقطه به‌فاصله‌های برابر، روی محیط دایره. ازاین روش، می‌توان در هر دو حالت استفاده کرد.

n نقطهٔ دلخواه (x_i, y_i) را $(i=۱,۲,...,n)$ روی محیط دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ در نظر بگیرید، اگر مجموع مجذورهای فاصله‌های بین هر دونقطه را با S نشان دهیم، داریم:

$$S=\Sigma[(x_i-x_j)^۲+(y_i-y_j)^۲]$$

که مجموع، برای همهٔ عددهای درست i و j، باشرط $۱\leqslant i<j\leqslant n$ باید محاسبه شود. این برابری را، بعداز تبدیل، می‌توان این‌طور نوشت:

$$S+(\Sigma x_i)^۲+(\Sigma y_i)^۲=n\Sigma x_i^۲+n\Sigma y_i^۲ \qquad (۱)$$

دراین‌جا، هر مجموع، به‌ازای $i=۱,۲,...,n$ درنظرگرفته شده است.

چون $x_i^۲+y_i^۲=۱$، بنابراین سمت راست (۱) برابر $n^۲$ می‌شود؛ یعنی

$$S=n^۲-(\Sigma x_i)^۲-(\Sigma y_i)^۲$$

و این نشان‌می‌دهد که $S>n^۲$ ممکن نیست و، درضمن، $S=n^۲$ وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم $\Sigma x_i=\Sigma y_i=۰$. از همین‌جا، می‌توان جواب‌های بسیاری را برای مساله پیدا کرد.

G.۱۰. پاسخ: خط‌های راست موازی به خط‌های راست موازی تبدیل می‌شوند، ولی در حالت کلی، دراین نگاشت، خط‌های راست عمود برهم به‌خط‌های راست عمودبرهم تبدیل نمی‌شوند؛ تنها دوخط راست $x=c_1$ و $y=c_2$، به‌دوخط راست عمود برهم $X=\frac{c_1}{a}$ و $Y=\frac{c_2}{b}$ تبدیل می‌شود.

اثبات دشوار نیست. هرخط راست با معادلهٔ $y=mx+k$ به‌خط راستی بامعادلهٔ $bY=maX+k$ تبدیل می‌شود، یعنی دوخط راست‌موازی با ضریب زاویهٔ m، منجر به دوخط راست موازی با ضریب زاویهٔ $\frac{ma}{b}$ می‌شوند. اکنون، دوخط راست عمود برهم، باضریب زاویه‌های m_1 و m_2 درنظر می گیریم. اگراین دوخط برهم‌عمود باشند، داریم: $m_1m_2=-1$. ضریب زاویه‌های نگاشت‌های این دوخط به‌صورت $\frac{m_1a}{b}$ و $\frac{m_2a}{b}$ درمی‌آیند که البته، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -1 نیست وبرابر $-\frac{a^2}{b^2}$ می‌شود.

G.۲۰. (x,y) را نقطهٔ دلخواهی واقع برمحیط بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می گیریم $(x,y\neq 0)$. بنابراین، چهارنقطهٔ $(\pm x,\pm y)$ بر محیط بیضی قرار دارند وچهار راس یك‌مستطیل‌اند که، ضلع‌های آن، موازی‌بامحورهای بیضی (یعنی محور x و محور y) هستند.

اکنون، فرض‌می‌کنیم، نقطه‌های A، B، C و D واقع برمحیط بیضی، مستطیل $ABCD$ را ساخته باشند و، درضمن، ضلع‌های مستطیل بامحورهای Ox و Oy موازی نباشند. ثابت می کنیم، چنین مستطیلی وجود ندارد. از نگاشت $x=aX$ و $y=bY$ استفاده می‌کنیم. بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ به‌دایرهٔ $X^2+Y^2=1$ تبدیل می‌شود. نگاشت نقطه‌های A، B، C و D را، نقطه‌های A'، B'، C' و D' می گیریم که بر محیط دایره واقع‌اند. بنابر مسالهٔ قبل، ضلع موازی $ABCD$ به‌ضلع‌های موازی در $A'B'C'D'$

تبدیل می‌شوند، ولی عمودبودن ضلع‌های مجاور از بین می‌رود. بنابراین، $A'B'C'D'$، مستطیل نیست و تنها یک متوازی‌الاضلاع است. ولی این، ممکن نیست، زیرا متوازی‌الاضلاع، اگر مستطیل نباشد، نمی‌تواند در یک دایره محاط شود، زیرا مجموع زاویه‌های روبه‌رو درمتوازی‌الاضلاع برابر ۱۸۰ درجه نیست.

G.۳۰ به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۴}$، چهارنقطهٔ (۲) به‌دست می‌آید. این‌چهار نقطه، راس‌های یك چهارضلعی هستندکه دو ضلع آن موازی محور xها و دوضلع دیگر آن موازی محور yهاست و، بنابراین، یك مستطیل است. اکنون، چهارنقطهٔ P، Q، R و S را، به‌ترتیب، با این مختصات، درنظر می‌گیریم:

$$(a\cos\theta, b\sin\theta),\ \ (-a\sin\theta, b\cos\theta),$$
$$(-a\cos\theta, -b\sin\theta),\ \ (a\sin\theta, -b\cos\theta)$$

به‌سادگی و با استفاده ازضریب زاویهٔ خط‌های راست، روشن می‌شودکه PQ و RS و، همچنین، PS و QR باهم موازی‌اند؛ ولی PQ و PS برهم‌عمود نیستند، زیرا حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های آن‌ها برابر $-\frac{b^۲}{a^۲}$ می‌شود که نمی‌تواند برابر ۱ — باشد، زیرا در تمامی بحث، فرض‌کرده بودیم: $a>b$.

G.۴۰ پاسخ: برای مثلث $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}ab$ و برای n ضلعی $\frac{۱}{۲}nab\sin\frac{۲\pi}{n}$. نتیجه‌ها، از این‌جا به‌دست می‌آیدکه، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ و مساحت nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد برابر $\frac{۱}{۲}n\sin\frac{۲\pi}{n}$ است (دستور (۳) از § ۱.۷، نیز به ما کمك می‌کند).

G.۵۰ پاسخ: ۲. معادلهٔ خط‌راستی‌که باضریب زاویهٔ m از نقطهٔ $(۴, -۳)$ بگذرد، به صورت $y=mx-۴m-۳$ است. y را بین این معادله و معادلهٔ $x^۲-۴y-۲۸=۰$ حذف می‌کنیم، به معادلهٔ

$x^{2}-4mx+16m-16=0$ می‌رسیم. برای برابر بودن ریشه‌های این معادله، باید داشته باشیم:

$$(4m)^{2}-4(16m-16)=0 \Rightarrow m=2$$

G.۶۰ پاسخ: نقطهٔ $(0,1)$ نزدیک‌ترین و نقطهٔ $(0,-1)$ دورترین

مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $(0,3)$ تا هر نقطهٔ (x,y) ازمحیط بیضی چنین است:

$$(x-0)^{2}+(y-3)^{2}=(2-2y^{2})+y^{2}-6y+9=$$
$$=11-(y^{2}+6y)=20-(y+3)^{2}$$

y دربازهٔ $(-1,1)$ تغییر می‌کند و، دراین‌بازه (عبارت بالا نزولی است)، یعنی به‌ازای $y=-1$ بیشترین مقدار و به‌ازای $y=1$ کم‌ترین مقدار را می‌پذیرد.

G.۷۰ پاسخ: برای $k\geqslant\frac{16}{5}$ نقطهٔ $(5,0)$ و برای $k<\frac{16}{5}$ دو نقطهٔ $\left(\frac{25k}{16}, \pm 3\sqrt{1-\frac{25k^{2}}{256}}\right)$. برای اثبات، مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $(k,0)$ را تا نقطهٔ (x,y) از بیضی درنظر می‌گیریم:

$$(x-k)^{2}+y^{2}=k^{2}+9-\frac{16}{25}\left(\frac{25}{8}kx-x^{2}\right)$$

برای می‌نیمم کردن این عبارت، باید ماکزیمم $\frac{25}{8}kx-x^{2}$ را پیدا کرد. این ماکزیمم، بنابه‌قضیهٔ a-۲.۲، به‌ازای $x=\frac{25k}{16}$ به‌دست می‌آید. x، طول نقطه‌ای ازمحیط بیضی است و، بنابراین $x\leqslant 5$. به‌این ترتیب، اگر داشته باشیم: $\frac{25k}{16}\geqslant 5$، یعنی $k\geqslant\frac{16}{5}$، آن‌وقت، خود نقطهٔ $(5,0)$ جواب مساله است. درحالت $k<\frac{16}{5}$، جواب $x=\frac{25k}{16}$، موقعیت نزدیک‌ترین

نقطه را مشخص می‌کند.

۸.G. پاسخ: نقطه‌های $(3, \pm 3\sqrt{2})$. مجذور فاصلهٔ مبداء مختصات تا نقطهٔ (x, y) از منحنی، چنین است:

$$x^2+y^2=x^2+\frac{54}{x}=x^2+\frac{27}{x}+\frac{27}{x}$$

این مجموع، حاصل‌ضرب ثابتی دارد، بنابراین، می‌نیمم آن‌وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم: $x^2=\frac{27}{x}$، یعنی $x=3$.

۹.G. پاسخ: نقطهٔ $(1, 0)$ نزدیک‌ترین نقطهٔ به $(3, 0)$ و نقطه‌های $(2, \pm\sqrt{6})$ نزدیک‌ترین نقطه‌ها به $(6, 0)$ هستند. در حالت اول، باید حداقل عبارت

$$(x-3)^2+y^2=3x^2-6x+7$$

را به‌دست آورد که منجر به $x=1$ می‌شود. درحالت دوم باید می‌نیمم

$$(x-6)^2+y^2=3x^2-12x+34$$

را پیدا کرد که، از آن‌جا، به $x=2$ می‌رسیم.

۱۰.G. پاسخ: $(a, 0)$ و $(-a, 0)$. اگر P و Q را دو نقطه از محیط بیضی بگیریم، به‌نحوی که‌مبداء مختصات بر پاره‌خط راست PQ واقع نباشد، آن‌گاه، دست‌کم یکی از دو پاره خط راست PP' و QQ'، از PQ بزرگتر می‌شود (P' و Q'، به‌ترتیب، دو انتهای دیگر قطرهایی از بیضی‌اندکه از P و Q می‌گذرند: درواقع، هم PP' وهم QQ' از مرکز بیضی می‌گذرند). بنابراین، اگر O را مبداء مختصات بگیریم، مساله به‌این‌جا منجر می‌شود که: نقطهٔ P را برمحیط بیضی طوری پیدا کنیم‌که فاصلهٔ PO، ماکزیمم باشد. اگر مختصات P را (x, y) فرض‌کنیم، آن‌وقت

$$PO^2=x^2+y^2=a^2-\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2$$

وقتی ماکزیمم است که برابر با $a^۲$ باشد $(a^۲+b^۲>۰)$. و این، تنها به‌ازای $y=۰$ به‌دست می‌آید.

G.۱۱. پاسخ: $۲\sqrt{a^۴+b^۴}$. شبیه مسالهٔ G.۱۰ استدلال می‌کنیم. باید نقطهٔ P را بر منحنی طوری پیدا کرد که بیشترین فاصله را از مبداء داشته باشد. در واقع، باید $x^۲+y^۲$ را، با شرط $\frac{x^۴}{a^۴}+\frac{y^۴}{b^۴}=۱$، ماکزیمم کنیم. $x^۲=u$ و $y^۲=v$ می‌گیریم. باید ماکزیمم $u+v$ را باشرط $\frac{u^۲}{a^۴}+\frac{v^۲}{b^۴}=۱$، پیدا کنیم. و این ماکزیمم، باتوجه به مسالهٔ ۱ از §۵.۷، برابر است با $\sqrt{a^۴+b^۴}$.

G.۱۲. در معادلهٔ بیضی، y را برحسب x به‌دست می‌آوریم

$$y=-x-۲\pm\sqrt{-x^۲+۱۸}$$

و روشن است که کمترین و بیشترین مقدار x، دراین‌جا، برابرند با $x=-۳\sqrt{۲}$ و $x=۳\sqrt{۲}$. بنابراین، جواب، چنین است:

$$(-۳\sqrt{۲},۳\sqrt{۲}-۲)\ ,\ (۳\sqrt{۲},-۳\sqrt{۲}-۲)$$

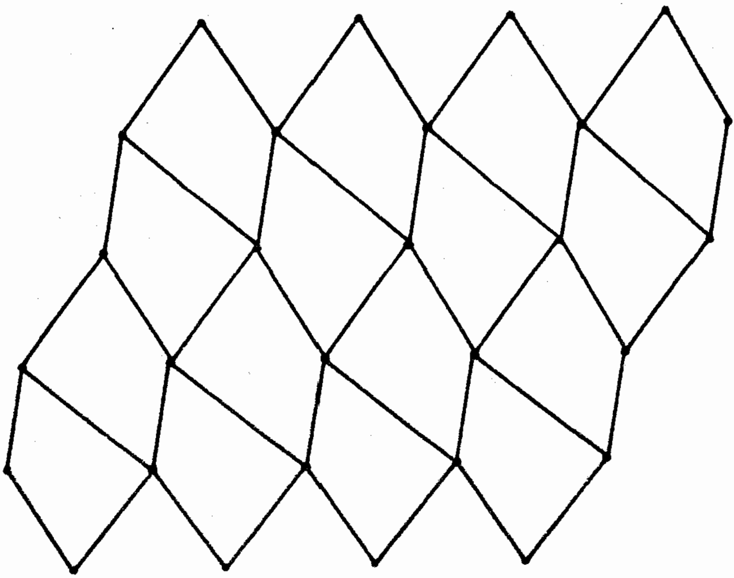
G.۱۳. درمعادلهٔ بیضی، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$x=y+۵\pm\sqrt{-(y-۳)^۲+۲۵}$$

روشن است که باید داشته باشیم: $-۲\leqslant y\leqslant ۸$ (درغیراین‌صورت، مقدار زیر رادیکال، منفی می‌شود). بنابراین ۲ — و ۸، کوچکترین و بزرگترین عرض نقطه‌های واقع بر بیضی است و متناظرند با دو نقطهٔ $(۳,-۲)$ و $(۱۳,۸)$. مرکز بیضی وسط پاره‌خط بین این دونقطه است که، مختصات‌آن، چنین می‌شود: $(۸,۳)$.

H.۱. با کنارهم گذاشتن هر دو مثلث مساوی، یک متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید، که برای «فرش‌کردن» صفحه مناسب است.

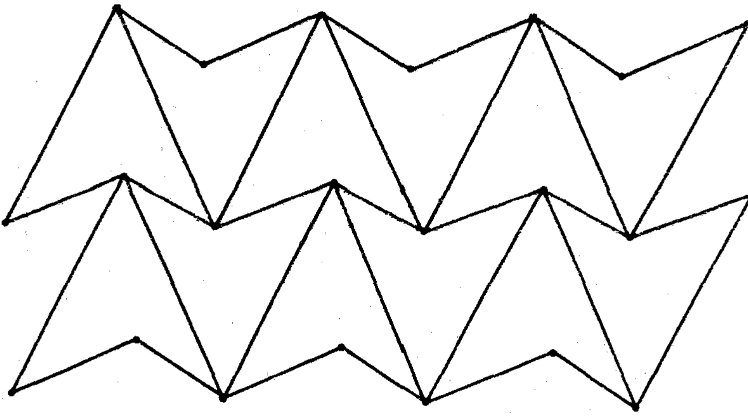
H.۲. وقتی چهارضلعی مفروض محدب باشد، دوچهارضلعی را طوری



شکل H۰۲-a

مجاور هم قرار می‌دهیم که دو ضلع برابر آن‌ها، بر یکدیگر قرار گیرند، دراین‌صورت، یك‌شش‌ضلعی به‌دست‌می‌آید(باصرف‌نظر کردن ازضلع‌مشترك) که هردوضلع روبه‌رو درآن، باهم‌مساوی وموازی‌اند(شکل H۰۲-a)، بنابراین، می‌توانند برای «فرش‌کردن‌صفحه» مورد استفاده قرار گیرد درمورد چهارضلعی مقعر هم، می‌توان به‌همین‌ترتیب عمل کرد (شکل H۰۲-b)؛ تنها تفاوتی که این‌حالت، با حالت قبلی دارد، این است که شش‌ضلعی حاصل، مقعراست، ولی به سادگی می‌توان ثابت کرد که، این شش‌ضلعی هم، برای «فرش کردن صفحه»، مناسب است.

H۰۳. مطابق شکل H۰۳، مثلث QRS را از پنج‌ضلعی حذف‌می‌کنیم، تا یك شش‌ضلعی به‌دست می‌آید. A و L را، به‌ترتیب مساحت و محیط پنج ضلعی‌می‌گیریم. اگر زاویهٔ‌راس Q را برابر۲θ فرض کنیم، آن‌وقت$\theta < ۹۰^\circ$ اکنون، اگر داشته‌باشیم:$QR = QS$، مساحت ومحیط شش‌ضلعی، به‌ترتیب، برابرند با



شکل H۲۰–b

$$A-\frac{۱}{۲}x^{۲}\sin ۲\theta \text{ ،} \quad L-۲x+۲x\sin\theta$$

بنابراین، باید ثابت کنیم:

$$\frac{A}{L^{۲}}<\frac{A-\frac{۱}{۲}x^{۲}\sin ۲\theta}{L-۲x+۲x\sin\theta}$$

که بعداز تبدیل‌های ساده، به‌این‌صورت درمی‌آید:

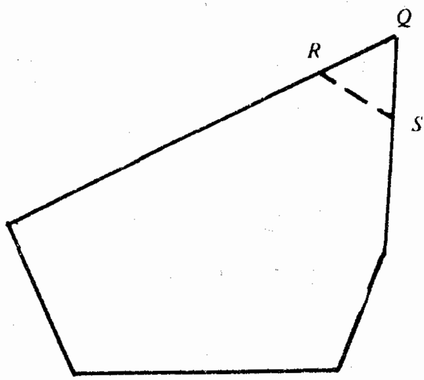
$$\frac{۱}{۲}L^{۲}x\sin ۲\theta+۴Ax(۱-\sin\theta)^{۲}<۴AL(۱-\sin\theta)$$

و این نابرابری، به‌شرطی‌که x به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، برقرار است.

I۰۱۰ پاسخ: P بر A منطبق است. ثابت می‌کنیم، برای هر موضع دیگر P، داریم:

$$PA+PC<AB+AC$$

درحالتی‌که P منطبق بر BC باشد، درستی این نابرابری روشن است. اگر P بر ضلع AB باشد، آن‌وقت



شکل ۳۰H

$$AB+AC=PB+PA+AC>PB+PC$$

و به‌همین‌ترتیب، برای موقعی که B روی ضلع AC باشد. اگر P در داخل مثلث باشد، CP را امتداد می‌دهیم تا AB را در Q قطع کند داریم:

$$AB+AC>QB+QC=QB+QP+PC>PB+PC$$

۲۰I. پاسخ: نقطهٔ P، درمحل برخورد قطر قرار دارد. اگر راس‌های چهارضلعی را A، B، C و D، محل تلاقی دو قطر را P ونقطهٔ دیگری از صفحهٔ چهارضلعی، غیر از P فرض‌کنیم، داریم:

$$QA+QC\geqslant AC\text{ ، }\ QB+QD\geqslant BD$$

وچون Q نمی‌تواند بر هر دوقطر واقع‌باشد، دست‌کم یکی از این دونابرابری به‌صورت اکید درمی‌آید. از مجموع این دو نابرابری، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۳۰I. $ABCD$ را یك چهارضلعی مقعر می‌گیریم، به‌نحوی‌که راس D در داخل مثلث ABC باشد. دراین‌صورت، P بایـد در نقطهٔ D قرار گیرد. ثابت می‌کنیم، اگر Q نقطهٔ دیگری غیر از D، درصفحهٔ چهارضلعی، باشد، آن‌وقت

$$QA+QB+QC+QD>AD+BD+CD$$

مثلث QAB، QBC و QAC، مثلث ABC را می‌پوشانند، بنابراین نقطهٔ D، در داخل یا روی محیط یکی از این مثلث‌هاست، و مثلاً مثلث QBC. بنابرمسالهٔ ۱.I داریم:

$$QB+QC>DB+DC$$

که اگر آن را با نابرابری $QA+QD\geqslant DA$ جمع کنیم، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۴۰I. اگر CP عمود وارد از راس C برقاعدهٔ AB باشد، داریم: $CK\geqslant CP$. بنابراین، کافی است ثابت کنیم:

$$AB+CP>AC+BC$$

ابتدا حالت $C=۹۰^\circ$ را درنظر می‌گیریم. طول‌های AB، AC، BC و CP را به‌ترتیب، c، b، a و p می‌گیریم. مساحت مثلث، برابر $\frac{۱}{۲}cp$ یا $\frac{۱}{۲}ab$ خواهد شد، یعنی $cp=ab$. اکنون، می‌توان نوشت:

$$c^۲+cp=c^۲+ab=(c-a)(c-b)+ac+bc>ac+bc$$

که اگر دوطرف را به c تقسیم کنیم، به‌نابرابری $c+p>a+b$ می‌رسیم.

حالا فرض می‌کنیم $C>۹۰^\circ$. نقطهٔ Q را روی AB طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $\widehat{QCB}=۹۰^\circ$. بنابراین

$$AB+CP=AQ+(QB+CP)>AQ+(CQ+CB)>AC+AB$$

۵۰I. یکی از دو زاویهٔ CPA یا CPB برابر یا بیشتر از ۹۰ درجه است، بنابراین، دست‌کم، یکی از دو نابرابری $CP<CA$ یا $CP<CB$ برقرار است.

۶۰I. پاسخ: درحالت $A<B<C$، نقطه P بر راس A قرار دارد؛ در حالت $A=B<C$، در یکی از دو راس A یا B؛ و در حالت مثلث

متساوی‌الاضلاع، در یکی از سه راس.

برای اثبات، کافی است به‌حالتی بپردازیم که، کوچکترین زاویهٔ مثلث، منحصر به‌فرد باشد؛ حالت‌های دیگر را می‌توان به‌سادگی، ازهمین حالت نتیجه گرفت. باید ثابت کنیم، اگر P در داخل مثلث یا روی محیط آن، به‌جز نقطهٔ A، واقع باشد، داریم:

$$AB+AC>PA+PB+PC$$

درحالتی که P بریکی از راس‌های B یا C قرار گیرد؛ این نابرابری، به‌سادگی به‌دست می‌آید. درحالتی که P روی محیط مثلث، به‌جز راس‌ها، واقع باشد، نابرابری با استفاده ازمسالهٔ قبلی ثابت می‌شود. اکنون، فرض می‌کنیم، نقطهٔ P، در داخل مثلث ABC قرار گیرد. حداکثر، یکی از زاویه‌های APB، APC و یا BPC حاده است (اگر دو تا از این زاویه‌ها حاده‌باشند، سومی از ۱۸۰ درجه تجاوز می‌کند). به‌این‌ترتیب، دو زاویه از این سه زاویه برابر یا بزرگتر از ۹۰ درجه است. حالت $\widehat{APB}\geqslant 90^\circ$ را در نظر می‌گیریم (حالت‌های دیگر را، می‌توان‌شبیه همین حالت، به‌انجام رسانید). C را به P وصل می‌کنیم و CP را ادامه می‌دهیم تا AB را درنقطهٔ K قطع کند. بنابرمسالهٔ ۴.I داریم:

$$PK+AB>PA+PB$$

و باتوجه به‌مسالهٔ ۵.I:

$$CK<\max(AC,BC)=AC$$

و بنابراین، نتیجه می‌گیریم:

$$AC+AB>CK+AB=PC+PK+AB>PC+PA+PB$$

۷.I پاسخ: درحالت مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطهٔ P می‌تواند درهر جای دلخواه از داخل یا روی محیط مثلث واقع باشد؛ درحالت‌های دیگر، نقطهٔ P، در راس زاویهٔ بزرگتر قرار دارد و، روشن است، اگر دو زاویهٔ بزرگتر (و مساوی باهم) داشته باشیم، مساله دو جواب پیدا می‌کند.

اثبات: p_1، p_2 و p_3 را، به‌ترتیب، طول عمودهای وارد از نقطهٔ P برضلع‌های AB، AC و BC فرض می کنیم (نقطهٔ P رادرداخل یاروی محیط مثلث گرفته‌ایم، زیرا به‌سادگی می‌توان روشن کرد که، P، نمی‌تواند درخارج مثلث قرارگیرد). a، b و c را، طول ضلع‌های BC، AC و AB، و h را طول ارتفاع وارد از راس بزرگترین زاویه (و دراین‌جا، به‌فرض: A) می گیریم. اگر مساحت مثلث را به دوطریق بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}ha=\frac{1}{2}(p_1c+p_2b+p_3a)$$

وقتی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، داریم: $p_1+p_2+p_3=h$. درحالت‌های دیگر داریم:

$$a=\max(a,b,c)>\min(a,b,c)$$

که درنتیجه، باید داشته باشیم: $h<p_1+p_2+p_3$.

I.۸۰. پاسخ: نقطه‌های P و Q را باید طوری انتخاب کرد که اولاً داشته‌باشیم: $AP=DP$ و $BQ=CQ$، ثانیاً سه زاویهٔ راس P و، همچنین، سه زاویهٔ راس Q، هرکدام برابر ۱۲۰ درجه باشند.

P و Q را، شبیه شکل I.۸، در دونقطهٔ دلخواه می گیریم. از نقطهٔ P، خطراستی موازی AD رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ هرون در §۵.۳، نقطهٔ P' روی این‌خط پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که از A و D به‌یك فاصله ومجموع $AP'+P'D$ می‌نیمم است. به‌همین ترتیب، اگر از Q، خطراستی موزای BC رسم‌کنیم، نقطهٔ Q به یك فاصله از B و C روی این خط راست قرار دارد، به‌نحوی‌که $BQ'+Q'C$ می‌نیمم باشد. همچنین $P'Q'\leqslant PQ$. بنابراین

$$AP'+DP'+P'Q'+BQ'+CQ'\leqslant AP+DP+PQ+BQ+CQ$$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که P بر P' و Q بر Q' منطبق‌باشد. دنبالهٔ مساله، یعنی این که، سه زاویهٔ راس P و سه زاویهٔ راس Q، هر یك برابر ۱۲۰ درجه‌اند، ازقضیهٔ ۲.۹-a نتیجه می‌شود.

I.۹. اگر P را، نقطهٔ‌فرما، درمثلث ABC بگیریم، هریك ازطول‌های AA'، BB' و CC'، برای مجموع $AP+BP+CP$ می‌شود.

I.۱۰. پاسخ: بله، همیشه درست است. برای اثبات، این نابرابری‌ها را باهم جمع کنید:

$$AR+AQ>QR ,\quad BR+BP>PR ,\quad CP+CQ>PQ$$

I.۱۱. پاسخ: نه ، همیشه درست نیست. نـابرابری تنها برای مثلث متساوی‌الاضلاع همیشه برقرار است.(کـه نتیجه‌ای است ازمسالـهٔ I.۵).
اگر ABC متساوی‌الاضلاع نباشد، این نابرابری، ممکن است برقرارنباشد.
اگر A را راس با زاویهٔ‌کوچکتر درنظر بگیریم، و AB را بزرگترین ضلع مثلث فرض می‌کنیم. اگـرنقطهٔ K را درنزدیکی راس A و ضلـع AB قرار دهیم، به‌نحوی که طول‌های AP و BQ نزدیك به‌طول AB وطول CR نزدیك به‌طول CA باشد، آن‌وقت، نابرابری برقرار نخواهد بود.

I.۱۲. مختصـات سه راس مثلـث را $(\circ,\circ)$، $(۶a,\circ)$ و $(۶b,۶c)$ مـی‌گیریم، مختصات مرکـز هندسـی مثلث به‌صورت $(۲a+۲b,۲c)$ درمی‌آید. همچنین، مساحت ایـن مثلث، برابر $۱۸ac$ مـی‌شود. نقطهٔ Q به مختصات $(t,\circ)$ را روی پـاره خـط راستی می‌گیریم که دو انتهای آن را، دونقطهٔ $(۳a,\circ)$ و $(۶a,\circ)$ تشکیل مـی‌دهند. G را مـرکز هندسی مثلث می‌گیریم و QG را رسم می‌کنیم تا محیط مثلث را در نقطهٔ دیگر R قطع کند؛ مختصات R به‌صورت $\left(\frac{۲ct}{t-۲a} , \frac{۲bt}{t-۲a}\right)$ درمی‌آید. مساحت مثلث OQR (O، مبداء مختصات) برابر $\frac{ct^۲}{t-۲a}$ می‌شود. نسبـت مساحت تمامی مثلث به‌مساحت مثلث OQR چنین است.

$$\frac{۱۸a(t-۲a)}{t^۲}=۱۸a(t^{-۱}-۲at^{-۲})$$

که باتوجه بـه‌قضیه a-۲.۲ و مسالـهٔ B.۷، بیشترین وکمترین مقدار این عبارت، وقتی‌که t از $۳a$ تا $۶a$ تغییرکند، برابـر است با $\frac{۹}{۴}$ و ۲.

I.۱۳۰ پاسخ: $s=\frac{۱}{۲}$ و ۲ $=s$. باتوجه به‌حل مسالهٔ قبل داریم:

$$RG:GQ=۲a:(t-۲a)$$

سپس ازشرط $۳a\leqslant t\leqslant ۶a$ استفاده کنید.

I.۱۴۰ مستطیلی درنظر می‌گیریم که مختصات دو انتهای قطری از آن $(۰،۰)$ و $(a،b)$ باشد؛ مثلث به‌راس‌های $(ra،a)$، $(۰،sb)$ و $(ta،b)$، چنان است که، راس‌های آن، برضلع‌های مستطیل قرار دارند. هرکدام از مقدارهای r و s و t، بین ۰ و ۱ واقع‌اند. می‌توانیم فرض کنیم: $t>r$ (اگر لازم باشد، می‌توان برای این‌منظور مستطیل را چرخاند). مساحت مثلث، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}ab(r-rs+ts)$$

ماکزیمم عبارت $r+s(t-r)$، به‌ازای ۱ $=s$، ۱ $=t$ و r دلخواه به‌دست می‌آید. [حالتی‌که دو راس مثلث، بر یك‌ضلع مستطیل واقع باشند، به‌خودی خودکنار می‌رود.]

I.۱۵۰ اگرمربع را به‌چهارمربع کوچکتر، وهرکدام به‌ضلع $\frac{۱}{۲}$، تقسیم کنیم، دست‌کم یکی از این مربع‌ها، شامل سه نقطه یا بیشتر است. مسالهٔ قبل را، برای سه‌تا از این‌نقطه‌ها درنظرمی‌گیریم. [یادداشت: به‌نظرمی‌رسد که $\frac{۱}{۸}$، کمترین مقداری است‌که می‌توان برای این مساله درنظرگرفت، ولی پرداختن به‌آن، بسیار دشوار است.]

I.۱۶۰ پاسخ: $\frac{۱}{۲}$. اثبات‌را می‌توان، باتوجه به نتیجه‌مربوط به‌مستطیل درمسالهٔ I.۱۴۰، به‌دست‌آورد. مبداء مختصات را، دریکی از راس‌های‌زاویهٔ حاده انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی‌که، برای a و b و c مثبت، مختصات $(۰،۰)$،

$(a،\circ)$، $(a+b،c)$ و $(b،c)$ را برای راس‌های متوازی‌الاضلاع داشته باشیم. تبدیل T را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که هر نقطهٔ $(x،y)$ را به‌نقطهٔ $(x-\frac{b}{c}y،y)$ تبدیل کند. این تبدیل، متوازی‌الاضلاع را، به مستطیل با با راس‌های $(\circ،\circ)$، $(a،\circ)$، $(a،c)$ و $(\circ،c)$ منجر می‌کند که همان مساحت ac را دارد. این‌هم به‌سادگی روشن می‌شود که مساحت هر مثلث، ضمن این تبدیل، ثابت می‌ماند. [(۴) از § ۱.۷ را ببینید].

J.۱۰ از بازکردن پرانتز، در $\sum(x_i-\bar{x})^۲\geqslant\circ$ به‌دست می‌آید:

$$\sum x_i^۲-۲\bar{x}\sum x_i+n\bar{x}^۲\geqslant\circ$$

در n ضرب و از برابری $n\bar{x}=\sum x_i$ استفاده می‌کنیم [$\bar{x}$، واسطهٔ حسابی بین عددهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n است].

J.۲۰ پاسخ: ۳بار. احتمال رسیدن به‌مجموع ۷ یا ۱۱، وقتی‌که دو تاس را باهم بیندازیم، برابر با $\frac{۸}{۳۶}$ یا $\frac{۲}{۹}$ است. بنابراین احتمال رسیدن به ۷ یا ۱۱ (دست‌کم یک‌بار)، درپرتاب سه‌بار تاس‌ها، چنین است:

$$۱-\left(\frac{۷}{۹}\right)^۳=\frac{۳۸۶}{۷۲۹}>\frac{۱}{۲}$$

J.۳۰ پاسخ: ۴ بار با احتمال $\frac{۱۳}{۱۸}$. احتمال وجود عددهای متمایز در ۳ پرتاب برابر است با $\frac{۴}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times۱$ یا $\frac{۵}{۹}$ و درچهار پرتاب، برابر است با $\frac{۵}{۱۸}$.

J.۴۰ پاسخ: ۵ پرتاب با احتمال $\frac{۶۷۱}{۱۲۹۶}$. احتمال این‌که، عدد نخستین،

ضمن n پرتاب تکرار نشود، برابر است با $n.\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n-۱}$ را به‌اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم تا احتمال متمم برابر $\frac{۱}{۲}$ یا کمتر شود.

J.۵۰. I. اگر داشته باشیم $p>\frac{۲}{۳}$، بازی‌کن این شانس را دارد که در ۲ پرتاب از ۴ پرتاب موفق‌شود. یکی از راه‌های رسیدن به‌جواب، استفاده از رابطهٔ $q=۱-p$ است. به نحوی‌که پرسش مساله را می‌توان با این نابرابری تنظیم کرد:

$$۱-q^۴-۴q^۳p>۱-q^۲$$

که اگر به‌جای p، مقدار آن $۱-q$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$۳q^۲-۴q+۱>۰ \Rightarrow (۳q-۱)(q-۱)>۰$$

و این نابرابری، به‌ازای $q<\frac{۱}{۳}$ برقرار است.

II. جملهٔ وسط را دربسط دو جمله‌ای $\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)^{۲n}$، $M(n)$ نشان می‌دهیم:

$$M(n)=\frac{(۲n)!}{n!n!۲^{۲n}}$$

اکنون به‌سادگی‌می‌توان روشن کرد که $M(n)>M(n+۱)$ وچون‌داریم:

$$P(n،۲n)=M(n)-\frac{۱}{۲}[۱-M(n)]$$

[$P(n،۲n)$ برابر است با جملهٔ وسط بسط دو جمله‌ای، به‌اضافهٔ نصف‌بقیهٔ جمله‌ها]. ازاین‌جا به‌سهولت، نابرابری $P(n،۲n)>P(n+۱،۲n+۲)$ ثابت می‌شود.

J.۶۰. پاسخ: ۲۳ روز. احتمال متمم را درنظر می‌گیریم، یعنی احتمال

این که، n نفر، روزهـای تولد متمایـز داشته باشند، ثابت می کنیم که، این احتـمال، بـرای ۲۲ $= n$، از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر و برای ۲۳ $= n$ از $\frac{۱}{۲}$ کـوچـکتر است. تعدادکل ترتیب‌های ممکن، برای روزهای تولد n نفر، برابر است با ۳۶۵^n، زیرا روز تولد نفر اول ممکن است هریك از ۳۶۵ روز باشد، برای هریك ازاین ۳۶۵ حالت، برای نفر دوم هم ۳۶۵ حالت وجود دارد وغیره.

اکنون، تعداد ترتیب‌های مختلفی را محاسبه می کنیم که برای n نفر ممکن است پیش آید و روزهای تولد متمایز داشته باشند. نفر اول می‌تواند یکی از ۳۶۵ روز را به‌عنوان روز تـولدخود داشته باشد، نفر دوم یکی‌از ۳۶۴ روز بقیه، نفر سوم یکی از ۳۶۳ روز بقیه وغیره. بنابراین تعدادکل این ترتیب‌ها (از روزهای تولد متمایز)، برابر است با

$$۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times \ldots \times (۳۶۵ - n + ۱)$$

که شامل n عامل است. ازتقسیم این مقدار بر ۳۶۵^n به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳۶۴ \times ۳۶۳ \times \ldots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{۳۶۵^{n-۱}} \qquad (۱)$$

و این احتمال‌آن است که nنفر، دارای‌روزهای تولد متمایز باشند. به‌سادگی می‌توان، به‌کمك جدول لگاریتم و ماشین حساب‌دستی ثابت‌کردکـه مقدار (۱)، وقتی‌که از۲۲ $= n$ به۲۳ $= n$ برویم، ازمقداری بیشتراز $\frac{۱}{۲}$به‌مقداری کمتراز $\frac{۱}{۲}$ پایین می‌آید.

به‌طریق‌دیگری هم می‌توان عمل‌کرد. ثابت‌می کنیم، وقتی از۲۲ $= n$ به ۲۳ $= n$ برویم، عکس عبارت (۱)، از ۲ بیشتر می‌شود.

۷۰.J اگر از قضیهٔ a-۵.۱۰، برای نقطه‌های P، A، C و B استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$PA.CB + PB.AC \geqslant PC.AB$$

وچون مثلث‌متساوی‌الاضلاع است، می‌توان ضلع‌ها را از دوطرف حذف کرد و به‌نابرابری مطلوب رسید. نابرابری، تنها وقتی به برابری تبدیل می‌شود که P، روی کمان کوچکتر AB از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد.

J.۸۰ پاسخ: نابرابری تنها وقتی همیشه برقرار است که AB، تنهاضلع بزرگتر مثلث باشد.

فرض کنید: $AB>AC$ و $AB>BC$. باتوجه به‌قضیهٔ ۱۰.۵-a داریم:

$$PA.BC+PB.AC\geqslant PC.AB$$

این نابرابری، برای همهٔ نقطه‌های صفحهٔ مثلث برقرار است. دوطرف آن‌را بر AB تقسیم می‌کنیم:

$$PA.\frac{BC}{AB}+PB.\frac{AC}{AB}\geqslant PC$$

کسرهای $\frac{BC}{AB}$ و $\frac{AC}{AB}$ کوچکتر از واحدند، بنابراین $PA+PB>PC$.

اگر فرض کنیم، برعکس، داشته باشیم: $AB\leqslant AC$. اگرنقطهٔ P، بر نقطهٔ A منطبق‌باشد، نابرابری $PA+PB>PC$ برقرار نمی‌شود. به‌همین ترتیب، برای حالتی‌که داشته باشیم: $AB\leqslant BC$.

J.۹۰ پاسخ: ۴۵ درجه.

J.۱۰۰ پاسخ: حداقل زمان لازم برابر است با ۱ ساعت و ۴۰دقیقه.

زاویهٔ BAP را با θ نشان می‌دهیم (شکل J.۱۰) که، درآن، A محل‌فانوس دریائی است. داریم:

$$AP=۲/۵.\sec\theta \text{ ، } BP=۲/۵.tg\theta \text{ ، } BK=۵ \text{ ، } PK=۵-۲/۵tg\theta$$

سرعت حرکت درامتداد AP برابر ۳ کیلومتر درساعت و درمسیر PK، برابر ۵ کیلومتر درساعت است. بنابراین زمان مسافرت چنین می‌شود:

$$\frac{۲/۵.\sec\theta}{۳}+\frac{۵-۲/۵.tg\theta}{۵}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۵}{۳}\sec\theta-tg\theta\right]+۱$$

عبارت داخل کروشه، بنابر قضیهٔ ۵.۵-a، به‌ازای $\sec\theta=\frac{۵}{۴}$، یعنی $tg\theta=\frac{۳}{۴}$ به‌حداقل مقدار خود می‌رسد.

J.۱۱۰. پاسخ: $\frac{c}{\sqrt{۳}}$. فرض کنید دونده و دوچرخه‌سوار، در یک لحظه، به‌نقطهٔ $(x+c ، ۰)$ برسند. دونده مسافت $\sqrt{x^۲+y^۲}$ را درهمان زمانی طی کرده است که، دوچرخه‌سوار، مسافت $x+c$ را می‌پیماید. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۲\sqrt{x^۲+y^۲}=c+x$$

(سرعت دوچرخه‌سوار، دوبرابرسرعت دونده‌است). اگر دوطرف این برابری را مجذور کنیم، می‌توان نوشت.

$$۴y^۲=\frac{۴c^۲}{۳}-۳\left(x-\frac{c}{۳}\right)^۲$$

که ماکزیمم آن به‌ازای $x=\frac{c}{۳}$ به‌دست می‌آید و، ازآن‌جا $y=\frac{c}{\sqrt{۳}}$.

J.۱۲۰. عرض کانال اول را c و عرض کانال دوم را k می گیریم (مسیر را از A به B فرض کرده‌ایم). نقطهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که پاره‌خط راست AC برابر c و خط‌راست AC عمود بر امتداد کانال اول باشد. سپس، نقطهٔ D را طوری درنظرمی‌گیریم که پاره‌خطراست CD برابر k وخطراست CD عمود بر امتداد کانال دوم باشد، اکنون، کوتاه‌ترین مسیر را می‌توان به‌این‌صورت درنظر گرفت: از نقطهٔ A درامتداد خطراستی موازی DB حرکت می کنیم تا به کانال اول برسیم، ازکانال اول ازطریق پلی‌عمود برآن عبور می کنیم، حرکت را دوباره در امتداد خط راست موازی DB ادامه می‌دهیم تا به کانال دوم برسیم، ازکانال دوم با پل‌عمود برکانال عبور می کنیم‌وسپس خود را روی خط راست موازی DB، به B می‌رسانیم.

J۱۳۰. پاسخ: (a) $\frac{۱}{۲}$؛ (b) $\sqrt{۳}$؛ (c) $\sqrt{۳}$؛ (d) $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$.

درحالت‌های (b)، (c) و (d)، ماکزیمم وقتی به‌دست می‌آیدکه نقطه‌های P، Q و R را در مرزها درنظر بگیریم. درحالت (c)، اگر P،Q و R، سه‌نقطهٔ متمایز واقع بر سطح کره باشند، دایرهٔ منحصر به‌فردی از آن‌ها می‌گذرد. این دایره بر سطح کره قرار دارد، بنابراین، ماکزیمم وقتی به‌دست‌می‌آیدکه P،Q و R بر دایرهٔ عظیمه‌ای از کره قرارگیرندکه،درنتیجه، همان حالت (b) می‌شود.

J۱۴۰. پاسخ: واحد، و درحالتی پیش می‌آیدکه یك‌نقطه را در مرکز و شش نقطهٔ دیگر را در راس‌های شش‌ضلعی منتظم محاطی قرار دهیم.

می‌توان ثابت‌کردکه، عددی بزرگتر از ۱، نمی‌توان به دست آورد. اگر دایره را بارسم‌شعاع‌ها به‌شش‌بخش برابر تقسیم‌کنیم، از۷ نقطه‌مفروض، دست‌کم دو تا، در یکی از این بخش‌ها یا روی مرز آن قرار می‌گیرند و ماکزیمم فاصلهٔ بین هر دونقطه، دریکی‌از این بخش‌ها، برابر واحد است.

J۱۵۰. پاسخ: ۹۶۰۳ و برای سه‌عدد ۹۷، ۹۶ و ۱۰۰.

J۱۶۰. $F-f$ را برابر β می‌گیریم، بنابراین $۰<\beta<۱$. فرض کنیدجیپ f بار برای‌ذخیرهٔ‌سوخت درفاصلهٔ $\frac{\beta}{۲f+۱}$ رفت و آمد کند. هربار می‌تواند با پرکردن باك بنزین خود، به‌اندازه $f-\frac{۲\beta f}{۲f+۱}$ درمخزن‌ذخیره کند سپس جیپ، از نقطهٔ آغاز، با β واحد سوخت حرکت می‌کند و با $\beta-\frac{\beta}{۲f+۱}$ واحد سوخت به‌مخزن ذخیره می‌رسدکه، روی‌هم، با مقدار ذخیره، f واحد سوخت دارد. ازاین‌جا به‌بعد، می‌توان با استفاده از دستور (۱)، حل مساله را کامل‌کرد.

J۱۷۰. از تجزیه و تحلیل متن استفاده‌کنید. نقطهٔ X_F را بر S منطبق بگیرید، بدون‌تغییر تعریف X_k برای $k=۰،۱،۲،...،f$. از اثبات‌نابرابری

(۵) نتیجه می‌شود: $X_F X_f \leqslant \frac{\beta}{۲f+۱}$. سمت راست برابری (۶) دارای جملهٔ اضافی $X_F X_f$ است، بنابراین

$$SD \leqslant ۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\dots+\frac{۱}{۲f-۱}+\frac{\beta}{۲f+۱}$$

J۱۸۰. پاسخ: $۲\frac{۵}{۶}$. دراین جا $d(F)=\frac{۳}{۲}$؛ بنابردستور (۲) نتیجه‌می‌شود $f=۲$، زیرا $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}$ از $\frac{۳}{۲}$ بیشترمی‌شود. به‌این‌ترتیب، از دستور (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳}{۲}=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{F-f}{۵}$$

K۱۰. پاسخ: مخروط با شعاع قاعدهٔ $۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ و ارتفاع $\frac{۴}{۳}$؛ چهاروجهی منتظم با یال $۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$؛ استوانهٔ قائم با شعاع قاعدهٔ $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ و ارتفاع $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$؛ مکعب بایال $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$.

اگر مخروط محاطی، قائم نباشد، مخروط قائم با همان قاعده، حجم کمتری دارد، زیرا ارتفاعش کوچکتراست. اکنون، مخروط قائم‌محاطی، با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h را درنظر می گیریم. راس مخروط را A، مرکز کره را C، مرکزقاعدهٔ مخروط را B، انتهای‌دیگر قطر AC را D وبالاخره، نقطه‌ای ازمحیط قاعدهٔ مخروط را E می گیریم، روشن است که

$$BD=۲-h\text{ ، }AB=h\text{ ، }BE=r\text{ ، }\widehat{AED}=\widehat{ABE}=۹۰^\circ$$

بنابراین، درمثلث قائم‌الزاویهٔ ADE داریم: $r^۲=h(۲-h)$. حجم‌مخروط

از رابطه $V=\frac{\pi}{3}r^2h$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$V=\frac{\pi}{3}h^2(2-h)=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2-h)$$

اگر از ثابت $\frac{4\pi}{3}$ بگذریم، مجموع عامل‌های ضرب، مقدار ثابتی است و، بنابراین، ماکزیمم آن وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $\frac{h}{2}=2-h$ یا $h=\frac{4}{3}$.

چهاروجهی محاطی، از نظر ماهیت خود، با مخروط محاطی تفاوتی ندارد. اولاً، به‌همان دلیلی که برای مخروط گفتیم، چهاروجهی باید هرم مثلث القاعدهٔ قائم باشد. ثانیاً قاعدهٔ هرم، باید مثلثی متساوی الاضلاع باشد. حجم چهاروجهی برابر است با $\frac{1}{3}Ah$ که، در آن، A مساحت قاعده و h ارتفاع آن است. مساحت قاعده با مساحت دایرهٔ محیطی آن متناسب است، بنابراین مساله به مخروط برمی گردد و همان نتیجه $h=\frac{4}{3}$ به‌دست می‌آید. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که، چهاروجهی، منتظم است با یال برابر $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

برای استوانهٔ دوار هم، باید استوانهٔ قائم را درنظر گرفت. اگر شعاع قاعدهٔ آن را r و ارتفاع آن را h بگیریم، با استفاده از برابری روشن $1=r^2+\frac{h^2}{4}$ خواهیم داشت:

$$V=\pi r^2h=\pi h\left(1-\frac{h^2}{4}\right)\ ;\ V^2=2\pi^2\frac{h^2}{2}\left(1-\frac{h^2}{4}\right)\left(1-\frac{h^2}{4}\right)$$

حجم وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم: $\frac{h^2}{2}=1-\frac{h^2}{4}$.

مکعب مستطیل محاطی بـا حجم ماکزیمم، باید قاعده‌ای مربع شکل داشته باشد و مسالـه، در ماهیت خـود، همان استوانه است. $h=۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ به‌دست می‌آید و محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد‌که، این‌مکعب مستطیل، یك مکعب است.

K.۲۰. پاسخ: درصفحه سه‌نقطه و درفضا چهارنقطه.

K.۳۰. I. اگرمختصات A، B، C و D ازچهاروجهی $ABCD$ را، به‌ترتیب (۰،۰،۰)، (۰،۱،۰)، (۱،۰،۵) و (۱۰،۰،۰) فرض‌کنیم، آن‌وقت خواهیم داشت:

$$AD+BD>AB+AC+BC+CD$$

و همچنین

$$AD^۲+BD^۲>AB^۲+AC^۲+BC^۲+CD^۲$$

II. درمثلث ABC داریم: $AC+BC>AB$. این‌گونه نابرابری‌ها را، برای هرچهار وجه چهاروجهی بنویسید و باهم جمع کنید.

III. ثابت می‌کنیم:

$$AC^۲+BC^۲+AD^۲+BD^۲>AB^۲+CD^۲ \qquad (*)$$

مبداء مختصات را بر راس A ومحور xها را منطبق بر AB می‌گیریم، به‌نحوی که‌مثلث ABC در صفحهٔ xOy قرار گیرد. بنابراین، مختصات راس‌های A، B، C و D را می‌توان این‌طور گرفت:

$$(۰,۰,۰)\ ;\ (p,۰,۰)\ ;\ (q,r,۰)\ ;\ (s,t,u)$$

باشرط $u\neq۰$ (اگر $u=۰$ باشد، همهٔ نقطه‌ها در یك صفحه قرار می‌گیرند). اگر فاصله‌ها را محاسبه کنیم، نابرابری (*) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$p^۲+q^۲+r^۲+s^۲+t^۲+u^۲-۲pq-۲ps>-۲ps-۲rt$$

که به‌سادگی، به‌نابرابری روشن زیر منجر می‌شود:

$$(p-q-s)^{۲}+(r+t)^{۲}+u^{۲}>۰$$

K۰۴۰. چهاروجهی $ABCD$ را درنظر می‌گیریم و ارتفاع DP آن را رسم می‌کنیم (P پای عمود وارد از راس D برصفحهٔ مثلث ABC است). نقطهٔ P می‌تواند در داخل، یا روی‌محیط و یا درخارج مثلث ABC باشد. ثابت‌می‌کنیم، مثلث‌های ABP، ACP و BCP، که‌مثلث ABC رامی‌پوشانند، مساحت‌هایی‌کمتر ازمثلث‌های ABD، ACD و BCD دارند؛ دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}>S_{ABP}+S_{ACP}+S_{BCP}\geqslant S_{ABC}$$

کافی است ثابت‌کنیم: $S_{ABD}>S_{ABP}$؛ دو نابرابری دیگر هم، شبیه‌آن‌ثابت خواهند شد، ثابت می‌کنیم: $S_{ABP}=S_{ADP}\cos\theta$ که، در آن، θ عبارت است ز زاویهٔ بین صفحه‌های دو مثلث (وقتی دو صفحه یکدیگر را قطع‌کنند، دو زاویهٔ دو وجهی به‌وجود می‌آورندکه یکی حاده و دیگری منفرجه‌است و یا هردو قائمه‌اند. دراین‌جا، زاویهٔ θ، زاویهٔ کوچکتر بین دوصفحه است، یعنی $\theta\leqslant ۹۰^\circ$. درحالتی‌که θ زاویه‌ای منفرجه‌باشد، برابری فوق‌بین‌مساحت‌های دو مثلث، برقرار نیست). ازنقطهٔ P، عمود PQ را بر خط‌راست AB فرود می‌آوریم؛ دراین‌صورت DQ هم بر AB عمود می‌شود و θ، همان زاویهٔ PQD است. مثلث PQD، در راس P قائمه‌است، بنابراین $PQ=DQ\cos\theta$ ولی DQ ارتفاع وارد از راس D برقاعدهٔ AB درمثلث DAB است؛همچنین PQ ارتفاع وارد از راس P برضلع AB درمثلث PAB است. با استفاده از رابطهٔ مربوط به‌مساحت مثلث، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$S_{ABP}=S_{ABD}\cdot\cos\theta \implies S_{ABD}\geqslant S_{ABP}$$

زاویه θ در سه موردی‌که باید عمل‌کنیم، دست‌کم دریک مورد قائمه نیست و، بنابراین، درمجموع به‌نابرابری اکید موردنظر می‌رسیم.

K۰۵۰. راهنمائی: حجم چهار وجهی، برابر است با حاصل‌ضرب $\frac{۱}{۳}$ مساحت یکی از وجه‌ها، درمجموع فاصله‌های نقطهٔ P از وجه‌ها.

K۶۰. درحالت کلی درست نیست. در واقع، این مساله به‌آن‌جامی‌رسد که، مجموع دو زاویهٔ هر مثلث، همیشه از زاویهٔ سوم بزرگتر نیست.

K۷۰. پاسخ: ۱۴ در ۱۴ در ۲۸ اینچ. مساله منجر به‌ماکزیمم کردن xyz، باشرط $2x+2y+z=84$، می‌شود. اگر xyz را به‌صورت $\frac{1}{4}\cdot 2x\cdot 2y\cdot z$ بنویسیم، جواب ازبرابری‌های $2x=2y=z$ به‌دست‌می‌آید.

K۸۰. پاسخ: کوتاه‌ترین مسیرها، درحالت I برابر $2\sqrt{218}$، در حالت II برابر ۲۵ و درحالت III برابر $\sqrt{1129}$ فوت.

مساله را می‌توان با «بازکردن» اطاق حل کرد، به‌نحوی که دیوار، سقف و کف در یك‌صفحه قرارگیرند. اگر طول اطاق را d بگیریم، مجذور مسیر به‌این‌صورت‌ها درمی‌آید:

I. $(d+6)^2+14^2$، ازطریق دیوارآخر، سقف، دیوارکنار و دیوار انتهای دیگر؛

II. $(d+10)^2$، از طریق دیوار آخر، سقف، دیوار انتهای دیگر؛

III. $(d+2)^2+20^2$، ازطریق دیوار آخر، سقف، دیوار کنار، کف، دیوار انتهای دیگر.

K۹۰. پاسخ: $\sqrt{49+\pi^2}$. روی‌سطح استوانه‌ای، دایره‌هایی‌به‌فاصلهٔ ۱ درنظر می‌گیریم و دو دایره‌ای را که اولی از نقطه‌های $(4,0,0)$ و $(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$ و دومی از نقطه‌های $(4,0,7)$ و $(2\sqrt{2},2\sqrt{2},7)$ می‌گذرند، مقایسه می‌کنیم. مساله، منجر به‌پیدا کردن فاصلهٔ بین دو راس مقابل در مستطیلی می‌شودکه طول ضلع‌های آن ۷ و π است، زیرا π برابر طول یك‌هشتم کمان دایرهٔ به‌شعاع ۴ می‌باشد.

K۱۰۰. پاسخ: $3\sqrt{3}$. این‌مساله‌هم، به‌روش مقدماتی قابل حل‌است، زیرا سطح مخروطی راهم می‌توان، مثل استوانه، روی یك صفحه گسترد. ناحیه‌ای ازسطح مخروطی را می‌گسترانیم‌که محدود می‌شود به خط راستی از $(0,0,0)$ تا $(\sqrt{5},0,-2)$، خط راستی‌از $(0,0,0)$ تا $(\sqrt{5},0,-2)$ و نیم‌دایره‌ای‌روی مخروط از $(\sqrt{5},0,2)$ تا $(\sqrt{5},0,-2)$، نیم دایره‌ای که

yهای آن غیرمنفی است وهمهٔ نقطه‌های آن دارای $z=\sqrt{5}$ هستندوه‌معادلهٔ آن $x^2+y^2=4$ است و، بنابراین، شعاعی برابر ۲ دارد. ناحیه‌ای که گسترش یافته‌است، قطاعی‌است از دایره‌ای به‌شعاع ۳، زیرا این ناحیهٔ «بادبزن‌شکل» محدود به‌دوشعاع‌است که‌آن‌هارا CP و CQ می‌نامیم وطول هرکدام برابر است با ۳. کمان دایره‌ای PQ، طولی برابر 2π دارد، زیرا طول این کمان، نصف طول محیط دایـرهٔ $x^2+y^2=4$ است. به‌این‌ترتیب، مسالـه، منجر به‌پیدا کردن فـاصلهٔ بین P و Q، یعنی طول پاره خـط راست PQ می‌شود. زاویهٔ PCQ را محاسبه‌می‌کنیم. راس این زاویه، درمرکز دایره‌ای به‌شعاع ۳ قرار دارد و روبه‌رو به‌کمانی برابر 2π است. به‌سادگی روشن می‌شود که $\widehat{PCQ}=120^\circ$. بنابراین، باید ضلع PQ را درمثلث PCQ، بامعلوم بودن $CP=CQ=3$ و $\widehat{PCQ}=120^\circ$ پیدا کرد.

K۰۱۱۰ پاسخ: $\dfrac{ab}{a+\sqrt{c^2+d^2}}$. در واقع داریم:

$$AP+PB=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(x-b)^2+c^2+d^2}$$

مجموع این دو رادیـکال، به‌همان صـورت (۱) در §۵.۳ است، بنابراین، می‌توانیم ازنتیجهٔ (۲) این بند استفاده‌کنیم.

K۰۱۲۰ پاسخ: شش بـرش. بـرای تبدیل یـك مکعب به ۲۷ مکعب کوچکتر، با کمتر ازشش برش‌نمی‌توان انجام داد، زیرا هیچ دو وجه‌مجاور را نمی‌توان، به‌طور هم‌زمان، برید.

K۰۱۳۰ پاسخ: $\theta=2$ و $h=r$ بهتر است از جهت عکس عمل کنید، یعنی با ثابت گرفتن حجم، می‌نیمم سطح را به دست آورید. حاصل‌ضرب سه جمله، درمساحت S، برابر است با

$$(2rh)(\theta rh)(\theta r^2)=2\theta^2r^4h^2=8V^2$$

بنابراین، حداقل S به‌شرطی به‌دست‌می‌آید که داشته‌باشیم: $2rh=\theta rh=\theta r^2$.

K۰۱۴۰ پاسخ: $2\sqrt{2}$. اگـر (x,y,z) را، نقطه‌ای ازسطح بگیریـم،

مجذور فاصلهٔ آن تا مبداء چنین است:

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۲}x^{۲}+y^{۲}+\frac{۶۴}{x^{۲}y^{۲}}$$

چهار جملهٔ مجموع حاصل‌ضرب ثـابتی دارند و، بنابراین، حداقل آن وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲}x^{۲}=y^{۲}=\frac{۶۴}{x^{۴}y^{۲}}$$

از این‌جا، چهار نقطهٔ نزدیک‌تر بـه‌مبداء مختصات به دست می‌آیدکه یکی از آن‌ها $(۲,\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ است.

۱۵.K n نقطـهٔ (x_i,y_i,z_i) را، بـرای $i=۱,۲,...,n$، بـر کـرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ در نـظر می‌گیریم. مجموع مجذورهای فاصله‌های بین دوبه‌دوی این نقطه‌ها، برابر است با

$$\Sigma[(x_i+x_j)^{۲}+(y_i-y_j)^{۲}+(z_i-z_j)^{۲}]$$

$(۱\leqslant i<j\leqslant n)$. این مجموع را می‌توان این‌طور نوشت:

$$n\sum_{۱}^{n}(x_i^{۲}-y_i^{۲}+z_i^{۲})-\Big(\sum_{۱}^{n}x_i\Big)^{۲}-\Big(\sum_{۱}^{n}y_i\Big)^{۲}-\Big(\sum_{۱}^{n}z_i\Big)^{۲}$$

جملهٔ اول، باتوجه به $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$، برابر است بـا $n^{۲}$. ماکـزیمم وقتی به‌دست می‌آیدکه نقطه‌ها روی محیط دایـرهٔ واحد درنظر گرفته شوند (مسالهٔ ۴.E را ببینید).

۱۶.K پاسخ: $۳\sqrt{۳}r$. هر سه‌نقطهٔ متمایـز ازسطح کره، صفحه‌ای را مشخص‌می‌کنندکه کره را دریک‌دایره قطع‌می‌کند. بنابراین، ماکزیمم‌مطلوب، وقتی به‌دست می‌آیـدکه، سه‌نقطه، روی دایرهٔ عظیمه و به فـاصلهٔ برابر از یکدیگر واقع باشند.

۱۷.K پاسخ: $۲\pi r$. یکی از راه‌هـای اثبات، این است‌که نقطه‌های $(۰,۰,r)$، $(r,۰,۰)$ و $(-r,۰,۰)$ را روی سطح کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$

انتخاب کنیم.

دراین جا، ثابت می‌کنیم، اگر P و Q و R، سه نقطه متمایز دلخواه ازسطح کره باشند، همیشه داریم:

$$\text{Arc}PQ+\text{Arc}QR+\text{Arc}RP\leqslant ۲\pi r$$

انتهای دیگر قطری از کره را که از P می‌گذرد، $P_۱$ می‌نامیم ($PP_۱$، قطری از کره‌است). دراین‌صورت، مجموع طول کمان‌ها را می‌توان این‌طورنوشت:

$$(\text{Arc}PQ+\text{Arc}QP_۱)+(\text{Arc}RP+\text{Arc}RP_۱)-$$
$$-(\text{Arc}QP_۱+\text{Arc}RP_۱-\text{Arc}QR)$$

عبارت داخل پرانتز آخر، مثبت یا صفر وعبارت‌های داخل هریك از دو پرانتز اول، برابر πr است.

۱۰.L کمانی از دایرهٔ به مرکز A؛ شعاع باید طوری انتخاب شودکه مساحت را نصف کند. دوکمان مشابه، به‌مرکزهای B و C هم وجوددارند. این نتیجه را می‌توان، بلافاصله، ازقضیهٔ‌هم‌پیرامونی به‌دست آورد، به‌شرطی که‌آن را درمسیری که A را درامتداد شش مثلث دور می‌زند، درنظربگیریم.

۱۰.M پاسخ: بزرگترین‌مقدارx، برابر $e^{\frac{۱}{e}}$ یا ...۱/۴۴۴۶۶ و حد دنباله، برابر e است.

ابتدا ثابت می‌کنیم، به‌ازای $۱<x\leqslant e^{\frac{۱}{e}}$، دنبالهٔ مفروض صعودی وکران‌دار و، بنابراین، دارای حد است. اگر $g_n(x)$ را n امین جملهٔ این دنباله فرض‌کنیم، روشن است که

$$x^{g_n(x)}=g_{n+۱}(x) \qquad (۱)$$

بازهٔ $۱<x\leqslant e^{\frac{۱}{e}}$ را I می‌نامیم وثابت می‌کنیم، برای $x\in I$ داریم:

$$g_{n+۱}(x)>g_n(x) \text{ و } g_n(x)<e$$

اثبات‌را باروش استقرای‌ریاضی‌می‌دهیم. نابرابری‌ها، برای $n=1$، برقرارند. اکنون فرض‌می‌کنیم، نابرابری‌ها، برای n برقرار باشند، دراین‌صورت‌داریم:

$$g_{n+2}(x)=x^{g_{n+1}(x)}>x^{g_n(x)}=g_{n+1}(x),$$
$$g_{n+1}(x)=x^{g_n(x)}<x^e\leqslant(e^{\frac{1}{e}})^e=e$$

حالا فرض می‌کنیم، دنبالهٔ مفروض، بـرای بعضی از مقدارهـای x، متقارب و دارای حدی متناهی باشد. درمعادلهٔ (۱)، وقتی $n\to\infty$،داریم: $x^y=y$، یا $x=y^{\frac{1}{y}}$، باتوجه به‌قضیهٔ ۴ درفصل اخیر، ماکزیمم $y^{\frac{1}{y}}$، برابر است با $e^{\frac{1}{e}}$، که تنها به‌ازای $x=e$ به دست می‌آیـد. بنابراین، برای این که دنبالهٔ مفروض متقارب باشد، باید $x=e^{\frac{1}{e}}$ گرفت.

درواقع، دنبالهٔ مفروض، برای هرمقدار x از بازهٔ $(1,e^{\frac{1}{e}})$ هم‌متقارب است ومقدار y در بازهٔ $(1,e)$ به دست می‌آید، که کوچکترین جواب از دو جواب معادلهٔ $y^{\frac{1}{y}}=x$ است. مثلاً، درحالت $x=\sqrt{2}$، برای y دومقدار ۲ و ۴ به‌دست‌می‌آید و دنبالهٔ مفروض، دراین‌حالت، به‌سمت ۲ متقارب است.